Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Probeklausur zur Höheren Mathematik 3
18. Januar 2010

Aufgabe 1 [8 Punkte]
Gegeben sei das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = \left(x^2 + y^2, \frac{1}{2}z^2, yz\right) \text{ und das Gebiet}$$

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 < 25;\ 9 < x^2 + y^2 < 16;\ z > 0\right\}.$$

Berechnen Sie

$$\int_{\partial G} f \cdot n \,\mathrm{d}\omega\,,$$

wobei n der in das Äußere von G zeigende Normalenvektor sei.

Aufgabe 2 [7 Punkte]
Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_V z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,,$$

$$\text{wobei } V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ x^2 + y^2 + z^2 < 2z\right\} \text{ ist.}$$

Aufgabe 3 [6 Punkte]
Es sei $P \subset \mathbb{R}^3$ die durch ihre Eckpunkte

$$(a,0,0), (0,a,0), (-a,0,0) \text{ und } (0,0,h) \text{ mit } a,h > 0$$

begrenzte, dreiseitige Pyramide. Berechnen Sie mittels des Prinzips von Cavalieri das Volumen dieser Pyramide P.

Aufgabe 4 [11 Punkte]
Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 6xy - y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 - 2xy + 3y^2 = 6$ und der Annahme, dass es sowohl Minima als auch Maxima gibt.

Aufgabe 5 [10 Punkte]

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{für } 0 \leq x \leq \pi \\ x - \frac{3}{2}\pi & \text{für } \pi < x < 2\pi \end{cases}, \text{ sowie } f(x + 2\pi) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

in eine Fourierreihe mit der Periode 2π und berechnen Sie damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} .$$

Aufgabe 6 [5+3 Punkte]

Geben Sie für die folgenden Zufallsexperimente jeweils eine passende Ergebnismenge Ω und dazugehörige Ereignismenge $\mathcal{E}$ an. Ordnen Sie den genannten Ereignissen Elemente von $\mathcal{E}$ zu und bestimmen Sie anschließend ihre Wahrscheinlichkeiten.

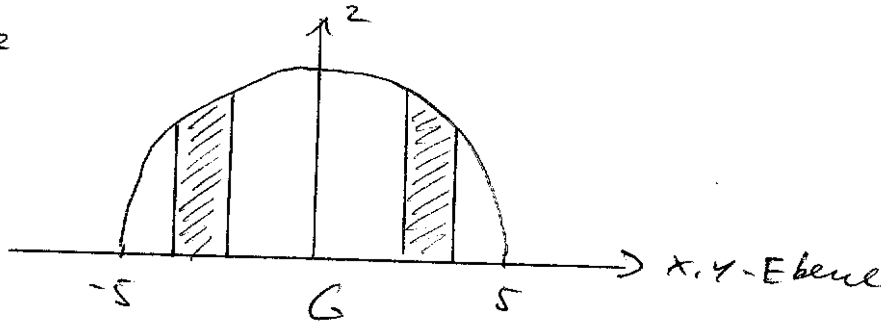
Hinweis: Sie können dabei davon ausgehen, dass es sich um Laplace-Wahrscheinlichkeiten handelt.

a) Beim dreimaligen Werfen eines Würfels ist die Augensumme kleiner als 6.

b) Ein Würfel wird zwei mal geworfen. Der erste Wurf erbringt eine Primzahl, der zweite eine größere Augenzahl als der erste.

HM3 Gü   Probeklausur   03. FEB. 2010

A1.) Skizze



∂G besteht aus stückweise regulären Flächen

$\Rightarrow$ G ist Gauß-Gebiet (1)

$f(x,y,z)$ ist stetig auf $\overline{G}$, stetig diff'bar auf G (1)

$\Rightarrow$ Satz v. Gauß anwendbar

$$\int_{\partial G} f \cdot n \, d\omega = \int_G div(f) \, dx\,dy\,dz \quad (1)$$

$$div(f) = 2x + y \quad (1)$$

Trafo auf Zylinderkoordinaten

$x = r \cdot \cos(\varphi)$, $y = r \cdot \sin(\varphi)$, $z = z$

mit $\varphi \in (0, 2\pi)$, $3 < r < 4$, $0 < z < \sqrt{25 - r^2}$ (1)

$$\Rightarrow \int_{\partial G} f\, n \, d\omega = \int_G div(f) \cdot dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{r=3}^{4} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{\sqrt{25-r^2}} (2r\cos(\varphi) + r\sin(\varphi)) \cdot r \, dz\, d\varphi\, dr \quad (1)$$

$$= \int_3^4 \int_0^{2\pi} (2\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) r^2 \sqrt{25 - r^2} \, d\varphi\, dr$$

$$= \int_3^4 r^2 \sqrt{25 - r^2} \, \underbrace{\left[+2\sin(\varphi) - \cos(\varphi) \right]_0^{2\pi}}_{=0} \, dr \; \underline{\underline{= 0}} \quad (1)$$

(1)

1

A2.)

$$V = \{ \dots \mid x^2+y^2+z^2 < 1,\ \underbrace{x^2+y^2+z^2 < 2z}_{r^2 < 2r\cos(\vartheta)} \}$$

$$V^* = \{ (r,\vartheta,\varphi) \mid \underbrace{r^2<1}_{0<r<1},\ \frac{r}{2} < \cos(\vartheta) < 1,\ 0<\varphi<2\pi \}$$

$$= \{ (r,\vartheta,\varphi) \mid 0<r<1,\ 0<\vartheta<\arccos(\tfrac{r}{2}),\ 0<\varphi<2\pi \}$$ 3

Damit $\int_V z\,dx\,dy\,dz \overset{1}{=} \int_{V^*} r\cos(\vartheta)\cdot \underbrace{r^2\sin(\vartheta)}_{\text{Funktionaldet.}}\,d\varphi\,d\vartheta\,dr$ 1

$$= \int_{r=0}^{1} \int_{\vartheta=0}^{\arccos(\frac{r}{2})} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta\,dr$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{1} r^3 \int_{\vartheta=0}^{\arccos(\frac{r}{2})} \cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\,d\vartheta\,dr$$ 1

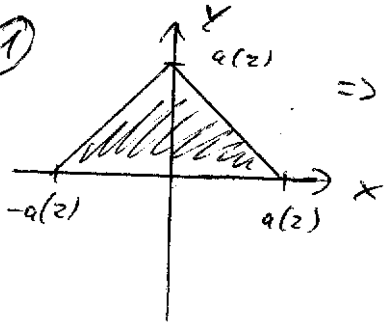
„ $= [-\frac{1}{2}\cos^2(\vartheta)]$ "

$$= -\pi \int_0^1 r^3\left(\frac{r^2}{4}-1\right)dr = -\pi\cdot\int_0^1 \frac{r^5}{4} - r^3\,dr$$

$$= -\pi\cdot\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{5}{24}\pi}}$$ 1

A3.) Schnitt von P mit Parallelebene zur x-y-Ebene in Höhe z:

Skizze: 1



$$\Rightarrow F(z) = \frac{1}{2} \cdot 2\,a(z) \cdot a(z) = a^2(z) \quad 1$$

Da P gerade Pyramide ist, ist $a(z)$ linear in z mit $a(0) = a$ und $a(h) = 0$

$$\Rightarrow a(z) = -\frac{a}{h} \cdot z + a \quad 1$$

$$\Rightarrow F(z) = a^2 \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \quad 1$$

Cavalieri

$$\Rightarrow V(P) \overset{1}{=} \int_{z=0}^{h} F(z) \cdot dz = a^2 \int_{z=0}^{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz$$

$$= a^2 \left(\int_0^h 1\,dz - 2 \int_0^h \frac{z}{h}\,dz + \int_0^h \frac{z^2}{h^2}\,dz \right)$$

$$= a^2 \left(h - \frac{2}{h} \cdot \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{3} h^3 \right)$$

$$= a^2 \left(h - h + \frac{1}{3} h \right) = \underline{\underline{\frac{1}{3} a^2 h}} \quad 1$$

A4.) Für alle Extrema $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

1.) von f unter Nebenbed. $g(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 6 = 0$

gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit 1

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0, y_0)$$

$$\begin{pmatrix} 2x_0 + 6y_0 \\ 6x_0 - 2y_0 \end{pmatrix} \qquad \lambda \begin{pmatrix} 2x_0 - 2y_0 \\ -2x_0 + 6y_0 \end{pmatrix}$$

$\nabla g(x_0, y_0) = 0 \iff x_0 = y_0 \wedge x_0 = 3y_0$

$\iff x_0 = y_0 = 0$ und sonst nicht in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ 1

2.) $2x_0 - 2y_0 = 0 \wedge 2x_0 + 6y_0 = 0$

$\iff x_0 = y_0 \wedge x_0 = 3y_0 \iff (x_0, y_0) = (0,0)$

und analog $-2x_0 + 6y_0 = 0 \wedge 6x_0 - 2y_0 = 0$ 1

$\iff x_0 = 3y_0 \wedge x_0 = \frac{1}{3} y_0$

$\iff (x_0, y_0) = (0,0)$,

so dass

3.) für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ gilt:

$$\lambda = \frac{2x_0 + 6y_0}{2x_0 - 2y_0} = \frac{6x_0 - 2y_0}{-2x_0 + 6y_0}$$

$\iff -4x_0^2 + 36y_0^2 = 12x_0^2 - 4x_0y_0 - 12x_0y_0 + 4y_0^2$

$\iff -16x_0^2 + 32y_0^2 + 16x_0y_0 = 0$ 1

$\iff x_0^2 - x_0y_0 - 2y_0^2 = 0$

$\iff x_{0\pm} = \frac{y_0}{2} \pm \sqrt{\frac{y_0^2}{4} + 2y_0^2} = \frac{y_0}{2} \pm \frac{3}{2}|y_0| \in \{-y_0, 2y_0\}$

1

4.)

In Nebenbed. einsetzen

$g(-y_0, y_0) = y_0^2 - 2y_0^2 + 3y_0^2 - 6 = 6(y_0^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow y_0 = \pm 1$

$g(2y_0, y_0) = 4y_0^2 - 4y_0^2 + 3 \cdot y_0^2 - 6 = 3(y_0^2 - 2) = 0$

$\Rightarrow y_0 = \pm\sqrt{2}$ (1)

Nur noch testen, d.h. in f einsetzen

$f(-1, 1) = (-1)^2 + 6 \cdot (-1) \cdot 1 - 1^2 = 1 - 6 - 1 = -6$

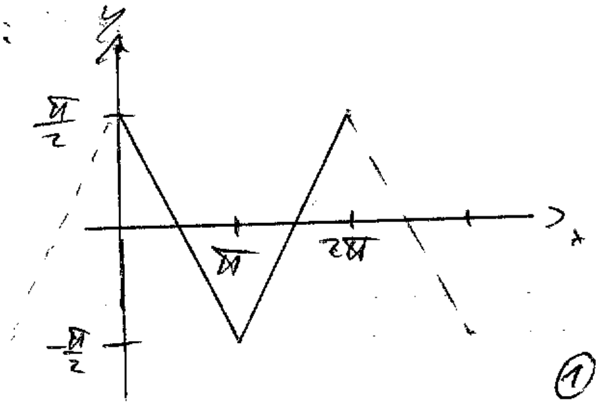
$= f(1, -1)$

$f(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = (-2\sqrt{2})^2 + 6(-2\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) - (\sqrt{2})^2$

$= 8 + 24 - 2 = 30 = f(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (1)

$\Rightarrow$ Die Punkte $(-1, 1)$ und $(1, -1)$ sind Minima (1) und $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ und $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sind Maxima. (1)

A5.) Skizze:



$\Rightarrow$ f achsensymmetrisch zur y-Achse

$\Rightarrow$ gerade $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 1

$a_0 = 0$ aus Symmetriegründen 1

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(nx)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left(x - \frac{3}{2}\pi\right) \cos(nx)\,dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\frac{1}{n}\sin(nx)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\Big|_0^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx + \underbrace{\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)\right)\Big|_{\pi}^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{n}\int_{\pi}^{2\pi} \sin(nx)\,dx \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(nx)\,dx \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_{\pi}^{2\pi} \right] \quad 2$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\left[-(-1)^n + 1 + 1 - (-1)^n \right] = \frac{2}{n^2\pi}\left(1 - (-1)^n\right) \quad 1$$

$$\Rightarrow T_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi} \cdot \left(1 - (-1)^n\right) \cos(nx) \quad 1$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{(2m+1)^2} \cdot \cos((2m+1)\cdot x) \cdot \frac{1}{\pi}$$

f stückweise glatt und stetig auf ganz $\mathbb{R}$ 1

$\Rightarrow T_f(x) = f(x) \quad \forall x \in (0, 2\pi)$

$$\Rightarrow T_f(\pi) = f(\pi) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{4} \cdot f(\pi) \qquad 1$$

<u>A6.)</u>

<u>a.)</u>

$$\Omega = \{(1,1,1), (1,1,2), \dots, (6,6,6)\} \qquad 1$$
$$= \{1,2,3,4,5,6\}^3$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega) \qquad 1$$

$$A = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (2,2,1), (2,1,2), (1,2,2), (1,1,3), (1,3,1), (3,1,1)\} \qquad 1$$

Laplace-Wsk.: $\Rightarrow P(A) \overset{1}{=} \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$ 1

<u>b.)</u>

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$$
$$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega) \qquad 1$$

$$B = \{(2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (5,6)\} \qquad 1$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{8}{6^2} = \underline{\underline{\frac{2}{9}}} \qquad 1$$