Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

# Übungen zur Höheren Mathematik 3
# Serie 14 vom 25. Januar 2010

---

## Teil A

### Aufgabe A51

a) Die Zufallsvariable $X$ beschreibe die mit einem idealen Würfel geworfene Augenzahl. Man berechne den Erwartungswert $E(X)$.

b) Jemand bietet gegen jeweils 50 Euro Einsatz folgende Spiele an

   **Spiel 1:** Würfeln mit 3 Würfeln. Die fünffache Augensumme wird in Euro ausgezahlt.

   **Spiel 2:** Würfeln mit 4 Würfeln. Die dreifache Augensumme wird in Euro ausgezahlt.

   Auf welches Spiel kann man sich mit Aussicht auf Gewinn einlassen?

**Aufgabe A52** In einem Spiel werden zwei Kartenstapel mit jeweils $n$ von 1 bis $n$ nummerierten Karten gemischt und die Karten anschliessend paarweise (eine Karte aus dem einen und eine aus dem anderen Stapel) nebeneinander gelegt. Für jedes Paar, für das beide Karten die gleiche Zahl zeigen, werden 10 Euro gezahlt. Für alle Paare, für die beide Karten unterschiedliche Zahlen zeigen, werden 1 Euro von der Gewinnsumme abgezogen (eine negative Gewinnsumme wird zugelassen). Die Zufallsvariable $X$ bezeichne die Gewinnsumme. Bestimmen Sie $E(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

**Aufgabe A53** Beim kontinuierlichen Roulette erfolgt die Ausspielung mit Hilfe eines drehbaren Zeigers. Die Zufallsvariable $X$ bezeichne den Winkel im Intervall $[0, 2\pi)$ des Zeigers. Jeder Winkel ist gleich wahrscheinlich. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X$, die Dichte $f_X$, den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ von $X$.

**Aufgabe A54** Es sei $\rho > 0$. Die Zufallsvariable $X$ besitze die Dichte

$$f(x) = ce^{-\rho|x|} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie $c$.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X$, den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ von $X$.

# Teil B

**Aufgabe B50** Als Spiel wird der Wurf mit 4 idealen Münzen und folgenden Gewinnmöglichkeiten angeboten:

- zeigt genau eine Münze das Wappen, so erhält man 1 Euro;
- zeigen genau zwei Münzen das Wappen, so erhält man 2 Euro;
- zeigen genau drei Münzen das Wappen, so erhält man 3 Euro;
- zeigen genau vier Münzen das Wappen, so erhält man 4 Euro.

Die diskrete Zufallsvariable $X$ bezeichne den Gesamtgewinn (ohne Einsatz) bei diesem Spiel. Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$, Varianz $\mathrm{Var}(X)$ und die Verteilungsfunktion $F_X$.

**Aufgabe B51** Die Zufallsvariable $X$ besitze die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 1\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie $c$.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_X$, den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ von $X$.

**Aufgabe B52** Aus einem Teig mit $r$ Rosinen werden $n$ Brötchen gebacken. Jede der möglichen Verteilungen der Rosinen auf die $n$ Brötchen ist gleich wahrscheinlich. Brötchen mit Rosinen werden für 50 Cent und Brötchen ohne Rosinen für 20 Cent verkauft. Die Zufallsvariable $X$ bezeichne die Gesamteinnahme. Bestimmen Sie $E(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.
**Hinweis:** Bezeichnen Sie mit $X_i$ eine Zufallsvariable, die den Wert 0 annimmt, wenn das $i$'te Brötchen keine Rosine enthält, und den Wert 1 sonst. Berechnen Sie zuerst $E(X_i)$ und $E(X_iX_j)$.

AM3 KGÜ 14 02. FEB. 2010

<u>B50.)</u>

* Im diskreten W'keitsraum, X, Y, Zufallsvariable:

$$E(X) = \sum_{\omega_i \in \Omega} X(\omega_i)\, p(\omega_i)$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y), \quad E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$$

$$Var(X) = E\left((X - EX)^2\right) = E(X^2) - (EX)^2$$

$$F_X(t) = p(\{\omega, X(\omega) \le t\})$$

$$F_X(t) = \sum_{x_i \in t} p(\omega_i)$$

Ereignisse: $\omega_0$ = keine Münze zeigt Wappen

$\omega_1$ = genau eine Münze zeigt Wappen

$\omega_2$ = genau zwei —"—

$\omega_3$ = " drei —"—

$\omega_4$ = " vier —"—

$$\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

W'keit der Ereignisse $\omega_i$:

$$p(\omega_0) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$p(\omega_1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot = \frac{1}{4}$$

$$p(\omega_2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 3/8$$

$$p(\omega_3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

$$p(\omega_4) = \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

zufalls var. die Gesamtgewinn bezeichnet

$$x(\omega_i) = \begin{cases} 0, & i=0 \\ 1, & i=1 \\ 2, & i=2 \\ 3, & i=3 \\ 4, & i=4 \end{cases}$$

ges.: $E(X)$, $Var(X)$, $F_X(t)$

$$E(X) = \sum_{\omega_i \in \Omega} x(\omega_i) \cdot p(\omega_i)$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \underline{\underline{2}}$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$

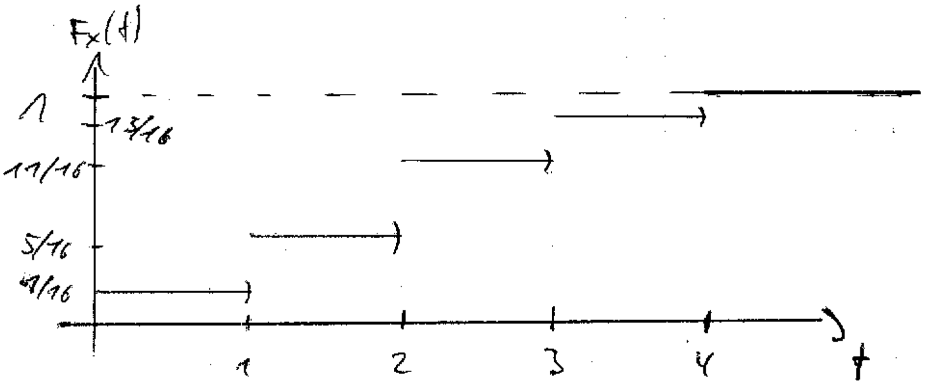
$$= \sum_{\omega_i \in \Omega} (x-2)^2 \cdot p(\omega_i)$$

$$= (0-2)^2 \cdot \frac{1}{16} + (1-2)^2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{16} \cdot 4 = \underline{\underline{1}}$$

Verteilungsfunktion

$$F_X(t) = p(\{\omega, \; x(\omega) \le t\})$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \le 0 \\ 1/16, & 0 \le t < 1 \\ 5/16, & 1 \le t < 2 \\ 11/16, & 2 \le t < 3 \\ 13/16, & 3 \le t < 4 \\ 1, & 4 \le t < \infty \end{cases}$$



B 51.)

$\ast$ X stetige Zufallsvariable, f(x) Dichte fkt.:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \qquad E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 (f(x)) dx$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

ZV X hat Dichte $f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

a.) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \overset{!}{=} 1$

$$1 = \int_0^1 cx(1-x)\, dx = c\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = c\,\frac{1}{6}$$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{c = 6}}$

b.) ges.: $F_X(t)$, $E(X)$, $Var(X)$

(i) $t < 0$: $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} 0\, dx = \underline{0}$

(ii) $t \in [0,1]$: $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\, dx}_{=0} + \int_0^t 6x(1-x)dx$

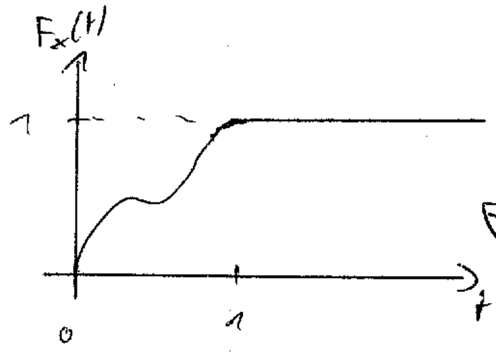
$$= 6\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right) \underline{= 3t^2 - 2t^3}$$

(iii) $t > 1$: $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x) dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^t 0\, dx$$

$$= 0 + 1 + 0 \underline{= 1}$$

$$\Rightarrow F_X(t) = \begin{cases} 0 & ; \ t \in (-\infty, 0] \\ 3t^2 - 2t^3 & ; \ t \in (0, 1] \\ 0 & ; \ t \in (1, \infty) \end{cases}$$




<u>nicht</u> die Funktion, sondern nur irgendein Graph

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = 6 \int_0^1 x^2 - x^3\, dx = 6 \left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = 6 \int_0^1 X^3 (1-X)\, dx = 6 \left[ \frac{1}{4} X^4 - \frac{1}{5} X^5 \right]_0^1$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{20} = \underline{\underline{\frac{3}{10}}}$$

$$Var(X) = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{20}}}$$

* Urnenmodelle (einfache Stichprobenverfahren)
- Eine Urne enthält n nummerierte Kugeln
- Ziehen von k Kugeln unter Bedingungen:

| Reihenfolge | zurücklegen mit | ohne |
|---|---|---|
| mit | $n^k$ | $\frac{n!}{(n-k)!}$ |
| ohne | $\binom{n+k-1}{k}$ | $\binom{n}{k}$ |

} Mächtigkeit

* Murmelmodell – Verteilen von k Murmeln auf n Zellen

| Mehrfachbelegung | unterschiedliche Murmeln ja | nein |
|---|---|---|
| mit | $n^k$ | $\binom{n+k-1}{k}$ |
| ohne | $\frac{n!}{(n-k)!}$ | $\binom{n}{k}$ |