Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 14 vom 25. Januar 2010

Teil A

Aufgabe A51

a) Die Zufallsvariable X beschreibe die mit einem idealen Würfel geworfene Augenzahl. Man berechne den Erwartungswert $E(X)$.

b) Jemand bietet gegen jeweils 50 Euro Einsatz folgende Spiele an

Spiel 1: Würfeln mit 3 Würfeln. Die fünffache Augensumme wird in Euro ausgezahlt.

Spiel 2: Würfeln mit 4 Würfeln. Die dreifache Augensumme wird in Euro ausgezahlt.

Auf welches Spiel kann man sich mit Aussicht auf Gewinn einlassen?

Aufgabe A52 In einem Spiel werden zwei Kartenstapel mit jeweils n von 1 bis n nummerierten Karten gemischt und die Karten anschliessend paarweise (eine Karte aus dem einen und eine aus dem anderen Stapel) nebeneinander gelegt. Für jedes Paar, für das beide Karten die gleiche Zahl zeigen, werden 10 Euro gezahlt. Für alle Paare, für die beide Karten unterschiedliche Zahlen zeigen, werden 1 Euro von der Gewinnsumme abgezogen (eine negative Gewinnsumme wird zugelassen). Die Zufallsvariable X bezeichne die Gewinnsumme. Bestimmen Sie $E(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

Aufgabe A53 Beim kontinuierlichen Roulette erfolgt die Ausspielung mit Hilfe eines drehbaren Zeigers. Die Zufallsvariable X bezeichne den Winkel im Intervall $[0, 2\pi)$ des Zeigers. Jeder Winkel ist gleich wahrscheinlich. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X, die Dichte f_X, den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ von X.

Aufgabe A54 Es sei $\rho > 0$. Die Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f(x) = ce^{-\rho|x|} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie c.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X, den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ von X.

Teil B

Aufgabe B50 Als Spiel wird der Wurf mit 4 idealen Münzen und folgenden Gewinnmöglichkeiten angeboten:

- zeigt genau eine Münze das Wappen, so erhält man 1 Euro;
- zeigen genau zwei Münzen das Wappen, so erhält man 2 Euro;
- zeigen genau drei Münzen das Wappen, so erhält man 3 Euro;
- zeigen genau vier Münzen das Wappen, so erhält man 4 Euro.

Die diskrete Zufallsvariable X bezeichne den Gesamtgewinn (ohne Einsatz) bei diesem Spiel. Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$, Varianz $\mathrm{Var}(X)$ und die Verteilungsfunktion F_X.

Aufgabe B51 Die Zufallsvariable X besitze die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 1\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie c.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X, den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ von X.

Aufgabe B52 Aus einem Teig mit r Rosinen werden n Brötchen gebacken. Jede der möglichen Verteilungen der Rosinen auf die n Brötchen ist gleich wahrscheinlich. Brötchen mit Rosinen werden für 50 Cent und Brötchen ohne Rosinen für 20 Cent verkauft. Die Zufallsvariable X bezeichne die Gesamteinnahme. Bestimmen Sie $E(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.
Hinweis: Bezeichnen Sie mit X_i eine Zufallsvariable, die den Wert 0 annimmt, wenn das i'te Brötchen keine Rosine enthält, und den Wert 1 sonst. Berechnen Sie zuerst $E(X_i)$ und $E(X_iX_j)$.

AM 3 GÜ 14 27. JAN. 2010

A51.) a.) $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

$P(\{w\}) = \frac{1}{6} \ \forall w \in \Omega$, da Laplace-Experiment

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$X(1) = 1,\ X(2) = 2, \dots, X(6) = 6$

$$E(X) = \sum_{w \in \Omega} X(w) \cdot P(\{w\}) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$$

b.) Sei X_i die Zufallsvariable, die die Augenzahl des i-ten Würfels beschreibt ($i = 1, 2, 3, 4$)

Die Zufallsvariablen

$G_1 := 5(X_1 + X_2 + X_3)$, beschreiben den Gewinn

$G_2 := 3(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$ vom 1. und 2. Spiel

Erwartungswerte:

$$E(G_1) = E(5(X_1 + X_2 + X_3)) = 5(E(X_1) + E(X_2) + E(X_3))$$
$$= 5 \cdot 3 \cdot \frac{21}{6} = \frac{105}{2} > 50$$

$$E(G_2) = 3 \cdot (E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4))$$
$$= 3 \cdot 4 \cdot \frac{21}{6} = 42 < 50$$

A52.) Wir beschreiben die Ergebnisse dieses Zufallsexperiments durch $n \times 2$-Matrizen

$$(*)\quad \omega = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix},$$ mit $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n \in \{1, \dots, n\}$ und $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ für $i \neq j$

$\Omega = \{ \omega$, die die Form $(*)$ haben $\}$

z.B. für $n=2$:

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ kann nur Werte der Form $X(\omega) = 10k - (n-k)$ annehmen, wobei k die Anzahl der Übereinstimmungen in ω ist.

Für den Erwartungswert gilt

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$$

<u>Problem</u>: Anzahl der Ergebnisse ω mit genau k Übereinstimmungen ist schwer zu berechnen.

<u>Idee</u>: Wir fassen K als Zufallsvariable auf und zerlegen $K = K_1 + \dots + K_n$, wobei K_i die Zufallsvariable ist mit

$$K_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls Übereinstimmung in } i\text{-ter Zeile} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= E(10K - (n-K)) \\ &= 10E(K) - (n - E(K)) \\ &= 11E(K) - n \end{aligned}$$

$E(K) = E(K_1 + \dots + K_n) = \sum_{i=1}^{n} E(K_i)$ und es gilt

$$\begin{aligned} E(K_i) &= 1 \cdot P(K_i = 1) + 0 \cdot P(K_i \neq 1) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

27. JAN. 2010

$$\Rightarrow E(k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow E(x) = 11 - n$$

$$\underline{\text{Varianz}(x) = E(x^2) - E(x)^2}$$

$$= E((11k - n)^2) - (11-n)^2$$

$$= E(121k^2 - 22nk + n^2) - (11-k)^2$$

$$= 121\,E(k^2) - \cancel{22n} \cdot 1 \;\cancel{+ n^2} - 121 + \cancel{22n} \cancel{- n^2}$$

$$= 121(E(k^2) - 1)$$

$$E(k^2) = E((k_1 + \dots + k_n)^2)$$

$$= E\Big(\sum_{i=1}^{n} k_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} k_i \cdot k_j\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(k_i^2) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} E(k_i \cdot k_j)$$

$$k_i \cdot k_j = \begin{cases} 1 & \text{falls übereinstimmungen in } i\text{-ter und } j\text{-ter Zeile} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(k_i \cdot k_j) = 1 \cdot P(k_i \cdot k_j = 1) + 0\, P(k_i \cdot k_j = 0)$$

Falls $i = j$: $P(k_i \cdot k_i = 1) = P(k_i = 1) = \frac{1}{n}$

$i \neq j$: $P(k_i \cdot k_j = 1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$

$$E(k^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = 1 + (n^2 - n) \cdot \frac{1}{n(n-1)}$$

$$= 2$$

$$\text{Varianz}(x) = 121 \cdot (E(k^2) - 1) = 121$$

A53.) Die Zufallsgröße X ist stetig („kontinuierliches Roulette") und gleichverteilt („jeder Winkel ist gleichwahrscheinlich") auf dem Intervall $[0, 2\pi)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{falls } 0 \leq x < 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

Falls $x<0$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$

$0 \leq x < 2\pi$: $F_X(x) = \int_{0}^{x} f_X(t)\, dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{2\pi}\, dt = \frac{x}{2\pi}$

$2\pi \leq x$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{2\pi} f_X(t)\, dt + \int_{2\pi}^{x} f_X(t)\, dt = 1$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2\pi} & 0 \leq x < 2\pi \\ 1 & x \geq 2\pi \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)\, dt = \int_{0}^{2\pi} t \cdot \frac{1}{2\pi}\, dt = \left[\frac{t^2}{4\pi}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\text{Varianz}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\, dt - \pi^2 = \int_{0}^{2\pi} \frac{t^2}{2\pi}\, dt - \pi^2$$

$$= \left[\frac{t^3}{6\pi}\right]_0^{2\pi} - \pi^2 = \left(\frac{8}{6} - 1\right)\pi^2 = \frac{1}{3}\pi^2$$

HM3 GÜ 14

A54.) Sei $\rho > 0$. Die Zufallsgröße X besitze die Dichte

$$f(x) = c \cdot e^{-\rho|x|} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

a.) Bestimme c:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} c \cdot e^{-\rho|x|}\,dx$$

$$= 2c \int_0^{\infty} e^{-\rho x}\,dx = 2c \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-\rho x}\,dx$$

$$= 2 \cdot c \cdot \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{\rho} e^{-\rho x} \right]_0^b$$

$$= 2 \cdot c \cdot \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\rho} \cdot e^{-\rho b} + \frac{1}{\rho} \cdot e^{-0} \right)$$

$$= \frac{2 \cdot c}{\rho} \Rightarrow c = \frac{\rho}{2}$$

b.) $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{\rho}{2} e^{-\rho|t|}\,dt$$

Falls $x \le 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\rho}{2} \cdot e^{\rho t}\,dt$

$$= \ldots = \frac{1}{2} e^{\rho x}$$

Falls $x > 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\,dt + \int_0^x f_X(t)\,dt$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{\rho}{2} e^{-\rho t}\,dt = \ldots = 1 - \frac{1}{2} e^{-\rho x}$$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\rho x} & \text{für } x \le 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\rho x} & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x \frac{\varrho}{2} e^{+\varrho x}\,dx + \int_{0}^{\infty} x \frac{\varrho}{2} e^{-\varrho x}\,dx$$

$$= \ldots = -\frac{1}{2\varrho} + \frac{1}{2\varrho} = 0$$

$$\text{Varianz}(X) = E(X^2) - E(\cancel{X})^2$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \ldots = \frac{2}{\varrho^2}$$