Übung zu
Grundgebiete der Elektrotechnik III
WS 09/10 - Blatt 5

Aufgabe 28

Gegeben sind zwei in z–Richtung unendlich ausgedehnte, parallele Leiter mit Abstand $2\,a$, die von den Strömen I_1 bzw. I_2 durchflossen werden (Bild 1). Ausgehend von der in der Vorlesung hergeleiteten Gesamtfeldstärke $\vec{H}_{ges}\,(x,y)$ ist eine parametrische Darstellung der Feldlinien von $\vec{H}_{ges}$ für $I_1 = I_2 > 0$ bzw. $I_1 = -I_2 > 0$ gesucht. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

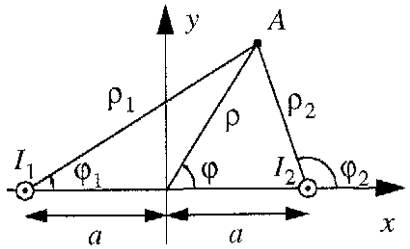


Bild 1

a) Zeigen Sie, dass entlang einer Feldlinie von $\vec{H}_{ges}\,(x,y)$ gilt: $H_x \cdot dy = H_y \cdot dx$.

b) Berechnen Sie dann mithilfe einer unbestimmten Integration $\int H_x \cdot dy = \int H_y \cdot dx$ die parametrische Darstellung der Feldlinien.

HINWEIS: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$

c) Welche Dualitäten zum elektrostatischen Feld ergeben sich?

Aufgabe 29

Eine dreieckige, gleichschenklige Leiterschleife der Höhe h und Breite b ist drehbar um die z-Achse gelagert (Bild 2). Sie wird vom Strom I durchflossen und befindet sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{e}_x$.

a) Welches mechanische Drehmoment $\vec{L} = L_z \cdot \vec{e}_z$ wirkt auf die Schleife?

b) Für welche Winkel α_1, α_2 ist das Drehmoment Null? In welcher Lage stellt sich ein stabiles Gleichgewicht ein?

Im Folgenden ist das Magnetfeld ortsabhängig mit $\vec{B} = B_0 \cdot (1 + z/h) \cdot \vec{e}_x$. Gesucht wird wiederum das Drehmoment L_z um die z-Achse.

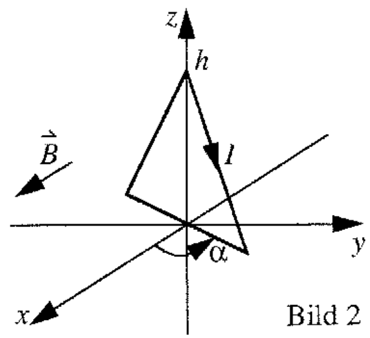


Bild 2

c) Zunächst soll der Beitrag dL_z eines infinitesimalen Leiterstücks $d\vec{s}$ berechnet werden. Welche Komponente (in Zylinderkoordinaten) der Kraft $d\vec{F} = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$ trägt zu dL_z bei? Aus welchen Komponenten von $d\vec{s}$ und $\vec{B}$ ergibt sich diese Komponente von $d\vec{F}$?

d) Berechnen Sie die gesuchte Komponente von $d\vec{F}$ und daraus dL_z.

e) Begründen Sie, warum das in der x-y-Ebene liegende Schleifensegment nicht zu L_z beiträgt. Bestimmen Sie L_z durch Integration über z.

Aufgabe 30

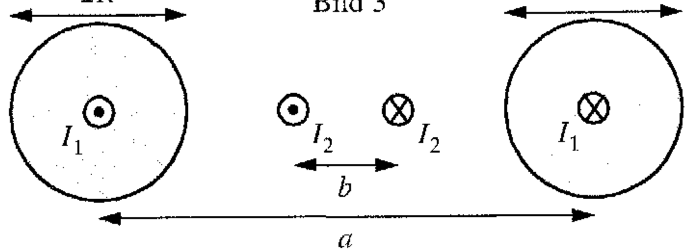


Bild 3

Die beiden äußeren Leiter der abgebildeten Zweidrahtleitung haben den Radius R und den Achsenabstand a. Sie dienen als Hin– und Rückleiter für den Strom I_1. In der Mitte der äußeren Zweidrahtleitung befindet sich eine weitere Zweidrahtleitung mit sehr dünnen Leitern im Abstand b und dem Strom I_2 (Bild 3).

a) Bestimmen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}_1$, die die äußere Zweidrahtleitung zwischen den beiden inneren Leitern erzeugt.

b) Berechnen Sie die längenbezogene äußere Gegeninduktivität L'_{21} der Gesamtanordnung. Bestimmen Sie daraus L'_{12}.

Aufgabe 31

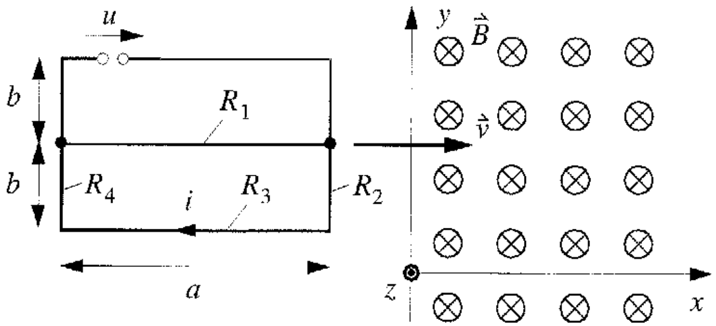


Bild 1

Eine Drahtschleife besteht aus zwei Maschen und bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in das Magnetfeld $\vec{B}$, das sich über die gesamte rechte Halbebene ($x \geq 0$) erstreckt (Bild 1). Zum Zeitpunkt $t = 0$ tritt die rechte Kante der Schleife in das Feld ein. Das vom Strom i verursachte Magnetfeld ist zu vernachlässigen.

a) Wie groß ist der Strom i für $a = 30\text{cm}$, $b = 10\text{cm}$, $v = 1\text{ms}^{-1}$, $B = 1\text{T}$ und $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 5\Omega$?

b) Was ergibt sich damit für die Spannung u?

c) Skizzieren Sie $i(t)$ und $u(t)$ im Zeitbereich $0 \leq t \leq 0{,}5\text{s}$.

d) Welcher Strom $i(t)$ ergibt sich, falls $B(t) = 1\text{T} \cdot e^{-t/\tau}$ mit $\tau = 0{,}1\text{s}$?

Aufgabe 32

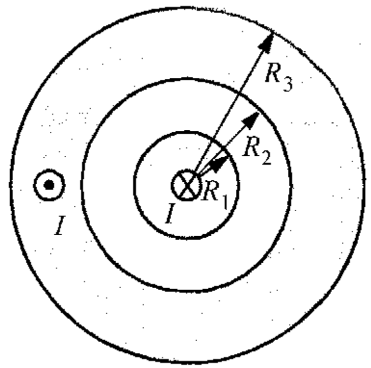


Bild 2

Gegeben ist ein unendlich langes Koaxialkabel, dessen Innenleiter mit Radius R_1 den Strom I führt. Der Außenleiter (R_2, R_3) dient als Rückleiter (Bild 2).

a) Berechnen Sie die längenbezogene innere und äußere Induktivität. Verwenden Sie dabei zunächst die Definition der Induktivität über die Flussverkettung.

b) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit der Definition der Induktivität über die Energie des magnetischen Feldes.

Aufgabe 33

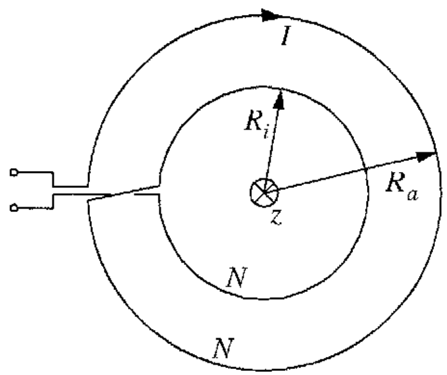


Bild 3

Eine schlanke Zylinderspule der Länge l ist in zwei Lagen mit je N Windungen gewickelt (Bild 3).

a) Wie groß ist die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ für $\rho < R_i$ und für $R_i < \rho < R_a$?

b) Berechnen Sie die verketteten Flüsse Ψ_i und Ψ_a der inneren und der äußeren Lage.

c) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus b) die Induktivität der Spule.

Fortsetzung Aufg. 28.1

b.)
$$\int H_x\, dy = -\frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{I_1 \cdot y}{(x+a)^2+y^2} + \frac{I_2 \cdot y}{(x-a)^2+y^2} \right) dy$$

$$\int H_y\, dx = \frac{1}{2\pi}\int \left(I_1 \cdot \frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} + I_2 \cdot \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} \right) dx$$

Hinweis: $$\int \frac{\overbrace{2y}^{f'(y)}}{\underbrace{(x+a)^2+y^2}_{f(y)}}\, dy$$

$$\int H_x\, dy = -\frac{1}{4\pi}\Big(I_1 \ln\big(\underbrace{|(x+a)^2+y^2|}_{\varrho_1^2}\big) + I_2 \ln\big(\underbrace{|(x-a)^2+y^2|}_{\varrho_2^2}\big)\Big) + C_1$$

$$\int H_y\, dx = \frac{1}{4\pi}\Big(I_1 \ln\big(\underbrace{|(x+a)^2+y^2|}_{\varrho_1^2}\big) + I_2 \ln\big(\underbrace{|(x-a)^2+y^2|}_{\varrho_2^2}\big)\Big) + C_2$$

Hinweis: $\ln(\varrho_1^2) = 2\cdot \ln(\varrho_1)$

Gleichsetzen:

$$-\frac{1}{2\pi}\big(I_1\cdot \ln(\varrho_1) + I_2 \cdot \ln(\varrho_2)\big) + c_1 \overset{!}{=}$$
$$\frac{1}{2\pi}\big(I_1 \ln(\varrho_1) + \ln(\varrho_2)\cdot I_2\big) + c_2$$

$$\underbrace{c_1 - c_2}_{c_3} = \frac{1}{\pi}\big(I_1 \ln(\varrho_1) + I_2 \ln(\varrho_2)\big)$$

Fall 1: $I_1 = I_2 > 0$

$$c_4 = I_1 \cdot \big(\ln(\varrho_1) + \ln(\varrho_2)\big)$$
$$\Leftrightarrow \frac{c_4}{I_1} = \ln(\varrho_1 \cdot \varrho_2) \rightarrow \varrho_1 \cdot \varrho_2 \overset{!}{=} \text{const}$$

Fall 2: $I_1 = -I_2 > 0$

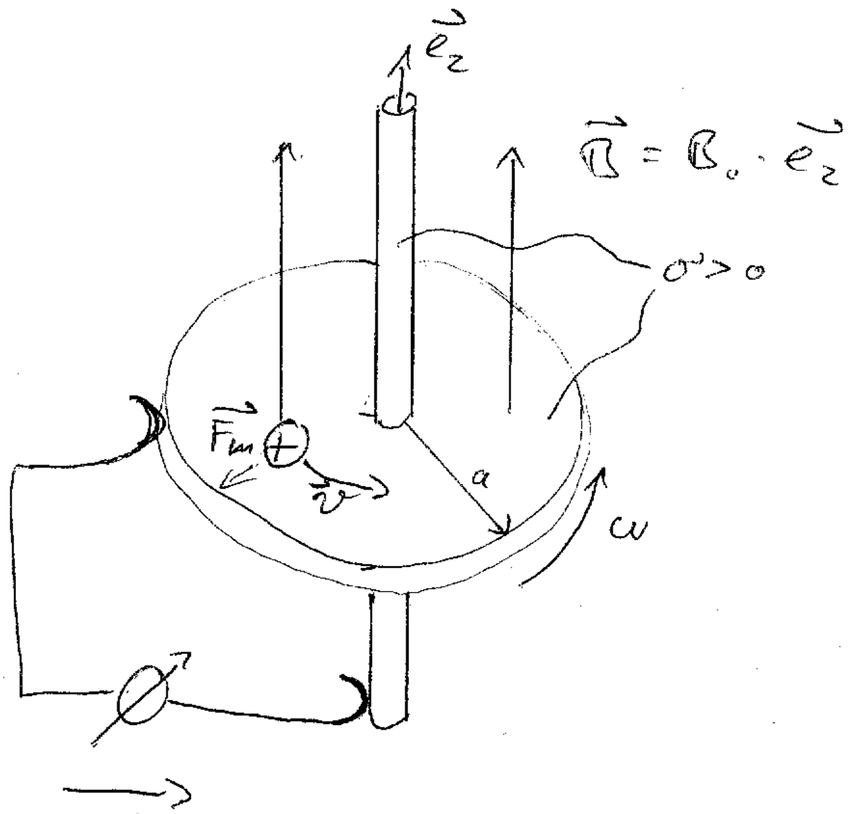
$$c_4 = I_1 \left(\ln(\rho_1) - \ln(\rho_2) \right)$$

$$\frac{c_4}{I_1} = \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} \overset{!}{=} \text{const}$$

vgl. Aufg. 16

c.) vgl. Blatt 3, Aufg. 16
Die Schnittlinien der Äquipotentialflächen mit der x-y-Ebene für $q_{L1} = -q_{L2}$ entsprechen den $\vec{H}$-Feldlinien für $I_1 = -I_2$

Barlow'sches Rad vgl. Skript S. [redacted] 5-18
Problem: $\oint \vec{E} d\vec{s} = U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt}$



$\vec{U_m}$ $\quad v = \omega \cdot \rho \cdot \vec{e_\phi}$

$$\vec{F_m} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$
$$= q \cdot (\omega \rho \vec{e_\phi}) \times (B_0 \cdot \vec{e_z})$$

$= q \cdot \omega \cdot B_0 \cdot \rho \cdot \vec{e}_\rho$

Gesucht: U_m

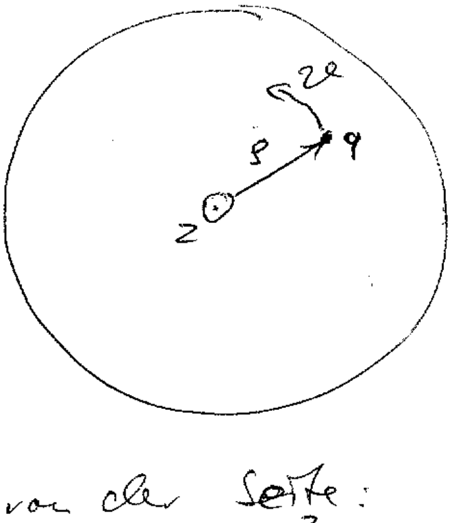
Problem: keine bewegte oder deformierte oder von einem magnetischen Fluss durchsetzte Schleife, also $\vec{B}(t)$

d.h. Ansatz $U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt}$ so nicht möglich

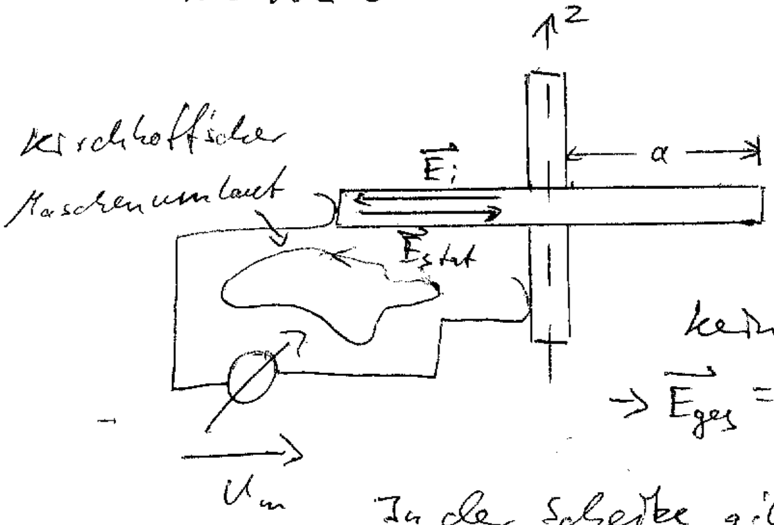
Lösung: Lorentzkraft auf mit rotierende Ladungsträger betrachten

Scheibe von oben:

$\vec{E}_i = \omega \cdot \rho \cdot B_0 \cdot \vec{e}_\rho$



Scheibe von der Seite:



kein Strom: $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = 0$

$\rightarrow \vec{E}_{ges} = \vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_{stat} = 0$

In der Scheibe gilt: $\vec{E}_{stat} = -\vec{E}_i$

$$\oint \vec{E}_{stat} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$+U_m + \int_{\varrho=0}^{a} \vec{E}_{stat} \cdot d\vec{s} = 0$$

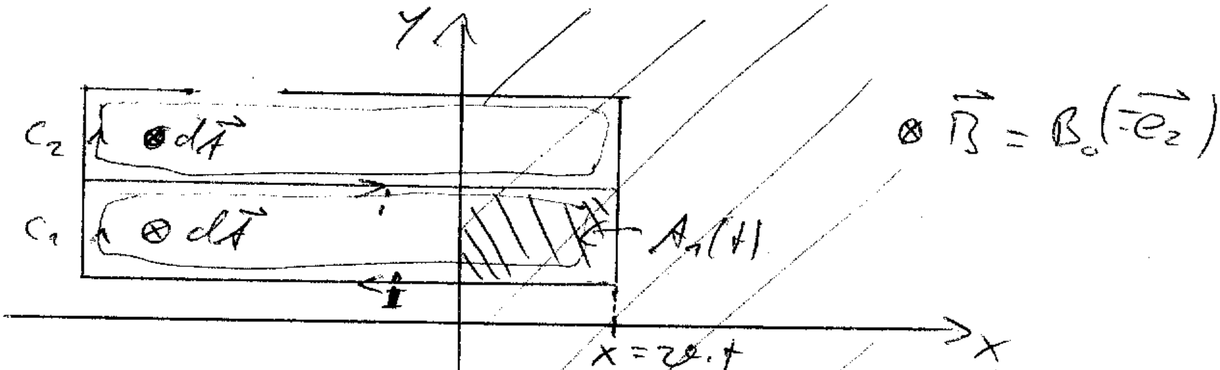
$$\rightarrow U_m = \int_{\varrho=0}^{a} \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \int_{\varrho=0}^{a} E_{i,\varrho}(\varrho) \cdot d\varrho$$

$$= \omega \cdot B_0 \cdot \int_{\varrho=0}^{a} \varrho \cdot d\varrho = \omega \cdot B_0 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2}$$

Aufg. 31.)

! Das Bild der Aufgabe zeigt einen Zeitpunkt

$t_{Bild} < 0$

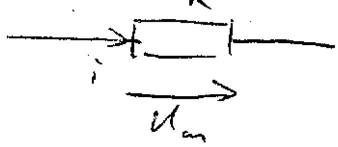


$$\oint_{C_1} \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{d\Phi_1(t)}{dt}$$

$$= i \cdot (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$$

$$\Psi = N \cdot \phi$$

Richtung von i aus VZs



GET3 GÜ 15

rechte Seite des Induktionsgesetzes

$\vec{B} = const$ und $\vec{B} \uparrow\uparrow d\vec{A}$

$$\phi_1 = \iint_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_0 \cdot \underbrace{A_1(t)}_{\text{vom magn. Fluss durchsetzte Teilfläche}}$$

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ B_0 \cdot b \cdot v \cdot t & \text{für } 0 \le t \le \frac{a}{v} \\ B_0 \cdot b \cdot a & \text{für } t > \frac{a}{v} \end{cases}$$

$$i \cdot R_{ges} = -\frac{d\phi_1}{dt} = \begin{cases} -B_0 b v & \text{für } 0 < t < \frac{a}{v} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$i(t) = -\frac{B_0 b v}{R_{ges}} = \frac{1\frac{Vs}{m^2} \cdot 0{,}1m \cdot 1\frac{m}{s}}{20\,\Omega}$$

$$i(t) \begin{cases} -5mA & \text{für } 0 \le t \le 0{,}3s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b.) obere Teilschleife:

$$\oint_{C_2} \vec{E}\, d\vec{s} = u(t) - i(t) \cdot R_1 = -\frac{d\phi_2(t)}{dt}$$

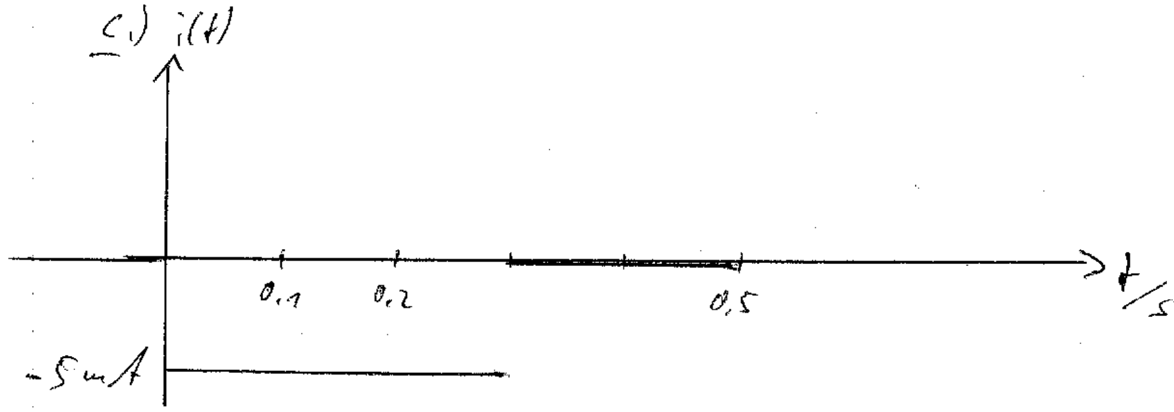
Aus Symmetriegründen gilt: $\phi_2(t) = \phi_1(t)$

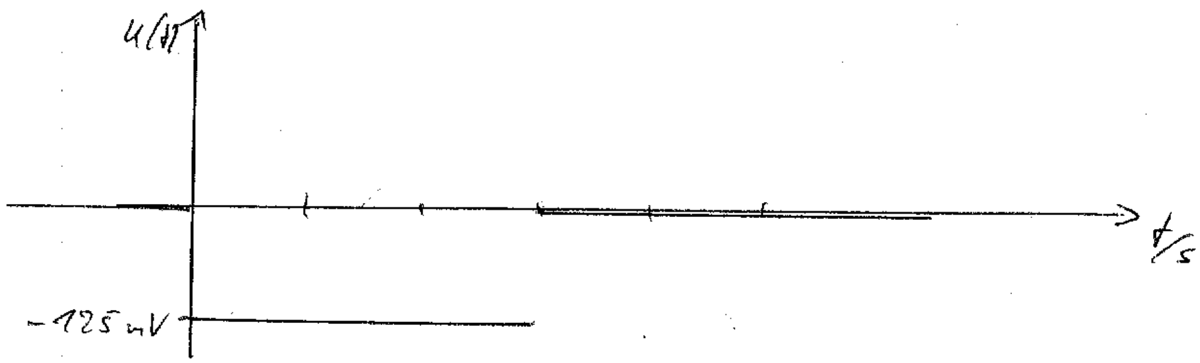
$$\rightarrow u(t) = -\frac{d\phi_2(t)}{dt} + i(t) \cdot R_1$$

$$u(t) = \begin{cases} -B_0\, b\, v - \frac{R_1}{R_{ges}} \cdot B_0 \cdot b \cdot v & \text{für } 0 \le t \le \frac{a}{v} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} -125\,mV & \text{für } 0 \le t \le 0{,}3\,s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c.)





d.) Jetzt $\Phi_1(t) = \iint\limits_{A_1(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{A}$

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ B_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot b \cdot v \cdot t & \text{für } 0 \le t \le \frac{a}{v} \\ B_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot b \cdot a & \text{für } t > \frac{a}{v} \end{cases}$$

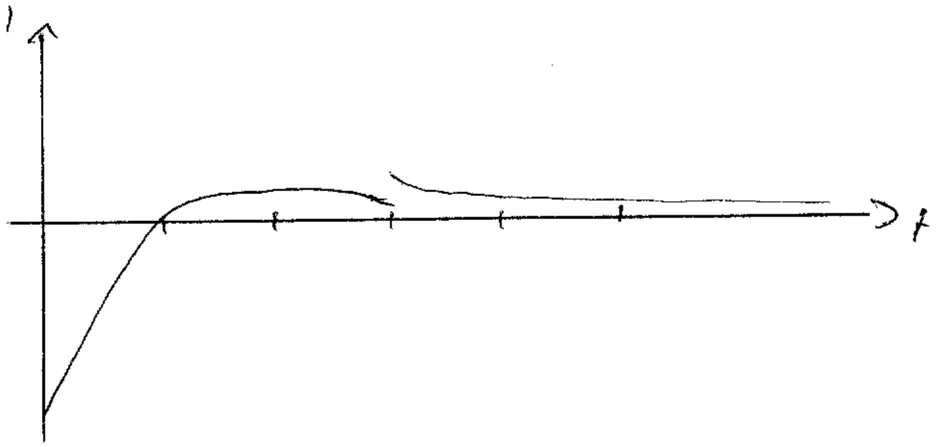
$$i(t) = -\frac{1}{R_{ges}} \cdot \frac{d\,\Phi_1(t)}{dt}$$

26. JAN. 2010

GET3 GÜ 15

$$i(t) = \frac{1}{R_{ges}} \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } t<0 \\ B_0 \cdot b \cdot v \left(1-\frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{für } 0 \le t \le \frac{a}{v} \\ B_0 \cdot ba \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{für } t > \frac{a}{v} \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t<0 \\ -5\,mA \left(1-\frac{t}{0{,}1s}\right) \cdot e^{-\frac{t}{0{,}1s}} & \text{für } 0 \le t \le 0{,}3s \\ 15\,mA \cdot e^{-\frac{t}{0{,}1s}} & \text{für } t > 0{,}3\,s \end{cases}$$



GFT3 GÜ 15

Korrektur: Aufg. 29

e.) $$L_z = \int_{z=h}^{z=0} dL_z(\phi=\alpha) + \int_{z=0}^{z=h} dL_z \underbrace{(\phi=\alpha+\pi)}_{\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)}$$

$$= -2 \cdot \int_{z=0}^{h} dL_z(\phi=\alpha)$$

$$= -\cancel{2} \cdot \int_{z=0}^{h} \left[\frac{b}{\cancel{2}} \cdot I \cdot B_0 \cdot \cos(\alpha)\right] \cdot \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \cdot dz$$

$$= -b I B_0 \cos(\alpha) \underbrace{\left[z - \frac{z^3}{3h^2}\right]_{z=0}^{z=h}}_{\frac{2}{3}h}$$