Aufgabe 15

a) magn. Flussdichte des Linienstroms: $\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi \rho} \cdot \vec{e}_\phi$

in der x-z-Ebene: $\vec{B}(x,i) = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi x} \cdot \vec{e}_y$

$$\phi(x_s,i) = \int_{z=z_0}^{z_0+a} \int_{x=x_s}^{x_s+a} \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi x} \vec{e}_y \underbrace{dx\, dy\, \vec{e}_y}_{d\vec{A}} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 \cdot a \cdot i}{2\pi} \cdot \ln\left(1 + \frac{a}{x_s}\right)}}$$

(oder direkt $d\vec{A} = a \cdot dx \cdot \vec{e}_y$)

b) Umlauf entlang der Schleife im Rechtsschraubensinn mit $d\vec{A}$ verknüpft:

$$-u_{ez} = \oint \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$u_{ez} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 \cdot a \cdot \hat{i}}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{x_s}\right) \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\overset{x_s = a}{=} \frac{\mu_0 \cdot a \cdot \hat{i}}{2\pi} \ln(2) \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

c) $u_{ez}(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$ (mit $x_s = x_s(t) = v_0 \cdot t + a$)

$$\left(= \frac{\partial \phi(x_s)}{\partial x_s} \cdot \frac{dx_s}{dt}\right) = \frac{\mu_0 \cdot a \cdot \hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{x_s}} \cdot \left(-\frac{a}{x_s^2}\right) \cdot v_0$$

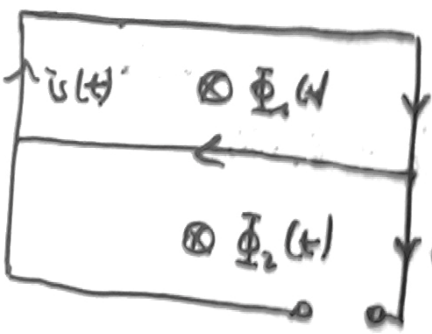
$$= -\frac{\mu_0 \cdot a^2 \cdot \hat{i} \cdot v_0}{2\pi (v_0 \cdot t + 2a)(v_0 \cdot t + a)}$$

d) Überlagerung der beiden Induktionseffekte

$$u_{12} = \frac{d\phi(t)}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \phi(x_s, i)}{\partial x_{s}} \cdot \frac{d x_s}{dt}}_{a)} + \underbrace{\frac{\partial \phi(x_s, i)}{\partial i} \cdot \frac{d i(t)}{dt}}_{b)}$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot a \cdot \hat{i}}{2\pi} \left[- \frac{a \cdot v_0 \cdot \sin(\omega t)}{(v_0 t + 2a)(v_0 \cdot t + a)} + \ln\left(1 + \frac{a}{v_0 t + a}\right) \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \right]$$

e)



keine Rückwirkung von $i_s(t)$

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \frac{1}{2}\phi(x_s = a, t) = \frac{\mu_0 a \cdot \hat{i}}{4\pi} \cdot \ln(2) \cdot \sin(\omega t)$$

in der oberen Schleife:

$$\oint_{C_1} \vec{E}\, d\vec{s} = i_s \cdot 3a \cdot R' = -\frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d\phi}{dt}$$

$$\Rightarrow i_s = -\frac{1}{6aR'} \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

In der unteren Schleife:

$$\oint_{C_2} \vec{E}\, d\vec{s} = -i_s \cdot a \cdot R' - u_{12} = -\frac{d\phi_2}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d\phi}{dt}$$

↳ $u_R = \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dt} - i_s a \cdot R' = \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{6}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{2}{3}\frac{d\Phi}{dt}$

$$= \frac{\mu_0 \cdot a \cdot \hat{i} \cdot \omega}{3\pi} \cdot \ln(2) \cdot \cos(\omega t)$$

f) $P_{el}(t) = i_s^2(t) \cdot 3 \cdot a \cdot R' = \frac{1}{12aR'} \cdot \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2$

$$= \frac{1}{12a \cdot R'} \left(\underbrace{\frac{\mu_0 \cdot a^2 \cdot \hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{v_0}{(v_0 \cdot t + 2a)(v_0 \cdot t + a)}}_{c)} \right)^2$$

Hier nur Induktionseffekt aufgrund von Bewegung der Schleife im Magnetfeld.

$\Rightarrow \quad P_{mech}(t) = \vec{F} \cdot \vec{v} = P_{el}(t)$

$\vec{v} = v_0 \cdot \vec{e_x} \quad \Rightarrow \quad P_{mech}(t) = F_x(t) \cdot v_0$

$$F_x(t) = \frac{P_{mech}(t)}{v_0} = \frac{v_0}{12a \cdot R'} \cdot \left(\frac{\mu_0 \cdot a^2 \cdot \hat{i}}{2\pi} \cdot \frac{1}{(v_0 t + 2a)(v_0 t + a)} \right)^2$$