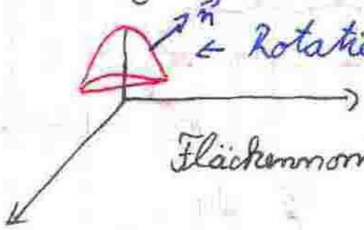
HöMa Wiederholung 1.2.10

Satz von Stokes

$$\mathcal{F} = \{ x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \; z = 2 - x^2 - y^2 ; \; x^2 + y^2 < 1 \quad z > 0 \}$$

$\vec{n}$ ← Rotationsfläche durch eine Parabel



Flächennormale

$$\underline{X} = \underline{X}(u,v) \qquad \underline{n} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} \right\|}$$

Fläche als Graph einer Fkt gegeben

Normale: $\dfrac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}} = \dfrac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}}$ (mit positiver z-Komponente)

$X(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}$ Normale $\dfrac{h_x, h_y, -1}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}}$ mit negativer z-Komp.

$F \; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 2x stetig diff'bar

$F(x, y, z) := (yz, z, 0)$

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} e_x & \partial_x & yz \\ e_y & \partial_y & z \\ e_z & \partial_z & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

oder $\begin{pmatrix} \frac{1}{\partial x} \\ \frac{1}{\partial y} \\ \frac{1}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} yz \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -1 \; \vec{e}_x \\ y \; \vec{e}_y \\ -z \; \vec{e}_z \end{matrix}$

Aufgabe: Berechne

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} F \, \underline{n} \, d\omega \qquad \underline{n} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}}$$

wird nicht berechnet $da = d\omega$

wobei $\underline{n}$ Flächennorm. mit +z-Komp

1) ohne Stokes

$$\int_{\mathcal{F}} g \, d\omega = \int_{B_1(0)} g(x,y) \sqrt{1 + |\nabla h|^2} \, dx dy$$

$$I = \int_{B_1(0)} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ y \\ x^2 + y^2 - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}} \, dx dy$$

$$-2x + 2y^2 + x^2 + y^2 - 2 \Rightarrow \int_{B_1(0)} (-2x + 3y^2 + x^2 - 2) \, dx dy$$

Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-2r\cos\varphi + 3r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi - 2)\,r\,d\varphi\,dr$$

Funktionaldeterminante im $\mathbb{R}^2 = r$

(" " $\mathbb{R}^3 = r\sin\varphi$)

$$= \int_0^1 \left(0 + 3r^3\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi + r^3\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi - \int_0^{2\pi} 2r\right) d\varphi\; dr$$

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2\varphi}_{=\frac{1}{2}(1-\cos(2\varphi))}\,d\varphi = \pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2\varphi)\,d\varphi = \underline{\underline{\pi}} = \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$= \int_0^1 (3r^3\pi + r^3\pi - 4\pi r)\,dr$$

$$= \pi\int_0^1 4r^3\,dr - 4\pi\int_0^1 r\,dr$$

$$= 4\pi\int_0^1 r^3\,dr - 4\pi\int_0^1 r\,dr = \pi - 2\pi = \underline{\underline{-\pi}}$$