Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 13 vom 18. Januar 2010

Teil A

Aufgabe A46 Von drei Kästchen mit je zwei Schubfächern enthalte das erste Kästchen in jedem Fach eine Goldmünze, das zweite in einem Fach eine Goldmünze, im anderen eine Silbermünze, und das dritte Kästchen in jedem Fach eine Silbermünze. Zufällig werde ein Kästchen ausgewählt und ein Schubfach geöffnet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, im anderen Fach des ausgewählten Kästchens eine Goldmünze zu finden, wenn das geöffnete Fach schon eine Goldmünze enthält.

Aufgabe A47 Die Kinder der sechsten Klasse einer Schule wurden durch einen Test auf ihre Fähigkeit im Rechnen geprüft. Es wird ermittelt, dass 25% der Schüler Mädchen sind, die den Test bestanden haben, 30% der Schüler Mädchen sind, die den Test nicht bestanden haben, 25% der Schüler Jungen sind, die den Test bestanden haben, und 20% der Schüler Jungen sind, die den Test nicht bestanden haben. Sind die Ereignisse "die Testperson ist ein Mädchen" und "die Testperson hat den Test bestanden" stochastisch unabhängig?

Aufgabe A48 In einer Urne sind r rote und b blaue Kugeln. Eine Kugel wird gezogen und die Farbe notiert. Anschließend wird die Kugel zusammen mit c Kugeln der notierten Farbe zurückgelegt. Dieser Vorgang wird n mal wiederholt. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit in der n'ten Ziehung eine rote Kugel zu ziehen $\frac{r}{r+b}$ beträgt.

Aufgabe A49 Die Schützen S_1, S_2, S_3 schießen auf ein Ziel. Im gleichen Zeitraum gibt S_1 dreimal und S_2 doppelt soviel Schüsse ab wie S_3. Die Trefferwahrscheinlichkeiten der einzelnen Schützen seien der Reihe nach $0,3$; $0,6$; $0,8$. Es fällt ein Schuss, der das Ziel trifft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_k dafür, dass der Schuss vom Schützen S_k $(k = 1,2,3)$ kommt.

Aufgabe A50 Sei $k > n$. Es werden k ununterscheidbare Kugeln auf n unterscheidbare Urnen verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine der Urnen leer bleibt?

Teil B

Aufgabe B45 Wir betrachten vier Kästchen mit je zwei Schubfächern. Das 1. und 2. Kästchen enthält in einem Fach eine Goldmünze und im anderen ein Silbermünze. Das 3. Kästchen enthält in jedem Fach eine Goldmünze, und das 4. Kästchen in jedem Fach eine Silbermünze. Zufällig wird ein Kästchen ausgewählt und ein Schubfach geöffnet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) im anderen Fach des ausgewählten Kästchens eine Silbermünze zu finden, wenn das geöffnete Fach eine Goldmünze enthält?

b) im anderen Fach des ausgewählten Kästchens eine Goldmünze zu finden, wenn das geöffnete Fach schon eine Goldmünze enthält?

Aufgabe B46 Wir betrachten das Experiment aus Aufgabe A48, Teil A mit 2 Ziehungen. Sei in der 2. Ziehung die Kugel rot, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) die Kugel in der 1. Ziehung rot war?

b) die Kugel in der 1. Ziehung blau war?

Aufgabe B47

a) Es seien A und B zwei unabhängige Ereignisse. Zeigen Sie, dass A und $\overline{B} := \Omega \setminus B$ auch unabhängig sind.

b) Es seien A, B, und C unabhängige Ereignisse, d.h. $p(A \cap B \cap C) = p(A)\,p(B)\,p(C)$. Weiter gelte $p(A \cap B) \neq 0$. Zeigen Sie, dass $p(C|A \cap B) = p(C)$.

Aufgabe B48 Ein Herpestest zeigt für 90% der Menschen mit Herpes ein positives Ergebnis. Der Test zeigt für 5% der Menschen ohne Herpes auch ein positives Ergebnis. In einer Schule sei 1% der Schüler mit Herpes infiziert. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schüler, der positiv auf Herpes getestet wird, tatsächlich mit Herpes infiziert ist.

Aufgabe B49 Es werden n ununterscheidbare Kugeln auf n unterscheidbare Urnen verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eine Urne leer bleibt?

B45.)

	1	2	3	4
1	G	G	G	S
2	S	S	G	S

G $\hat{=}$ Gold
S $\hat{=}$ Silber

Ergebnismenge $\Omega = \{1,2,3,4\} \times \{1,2\}$

$P(\{i,j\}) = \frac{1}{8}$ (alle Fälle sind gleich wahrscheinlich)

a.) $A \hat{=}$ Silber im anderen Fach
$B \hat{=}$ Gold im geöffneten Fach

ges.: $P(A|B)$

* bedingte W'keit:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{\underset{\uparrow \neq 0}{P(B)}} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A),$$

wenn A und B stochastisch unabh. sind.

$A = \{(1,1),(2,1),(4,1),(4,2)\}$
$B = \{(1,1),(2,1),(3,1),(3,2)\}$

$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$P(A|B) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$

b.) $c \hat{=}$ Geld im anderen Fach

$c = \{(1,2),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

B46.) 2 Ziehungen, Kugel in der zweiten Ziehung ist rot.

ges: a.) 1. Kugel rot

b.) 1. Kugel blau

Ereignisse: $Z \hat{=}$ 2. Kugel rot

$R \hat{=}$ 1. Kugel rot

$B \hat{=}$ 1. Kugel blau

Ω sei Menge aller möglichen Paare von Kugeln.

$P(R) = \frac{r}{r+b}$, $P(B) = \frac{b}{r+b}$ (aus A48)

$P(Z) = \frac{r}{b+r}$

zu a.) $P(R|Z)$

* Ereignisse $A_1, \dots, A_N$ bilden eine vollständige Ereignisdisjunktion, wenn

$A_i \cap A_j = \emptyset$ und

$\bigcup_{i=1}^{N} A_i = \Omega$ gilt.

* Spezialfall: $A_1, \dots, A_N$ bilden vollst. Ereignisdisjunktion mit $P(A_i) > 0$ und $P(B) > 0$, $B \in \mathcal{E}$.

Bayes: $\Rightarrow$ $p(A_i|B) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(B)}$

$$= \frac{\frac{p(A_i \cap B)}{p(A_i)} \cdot p(A_i)}{p(B)} = \frac{p(B|A_i)}{p(B)} \cdot p(A_i)$$

R und B bilden eine vollständige Ereignisdisjunktion von Ω.

$\Rightarrow$ Bayes anwenden:

$$p(R|Z) = \frac{p(Z|R) \cdot p(R)}{p(Z)} = p(Z|R) = \frac{r+c}{r+b+c}$$

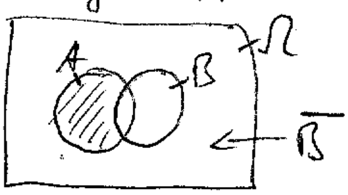
b.) $p(B|Z) = \frac{p(Z|B) \cdot p(B)}{p(Z)} = \frac{b}{r+b} \cdot \frac{b+r}{r} \cdot \frac{r}{r+b+c}$

$$= \frac{b}{r+c+b}$$

B47.)

a) A, B unabh. Ereignisse

zu zeigen: A und $\bar{B} = \Omega / B$ unabh.



$$p(A \cap \bar{B}) = p(A \setminus B)$$

$$= p(A) - p(A \cap B)$$

$$= p(A) - p(A) \cdot p(B)$$

$$= p(A) - p(A) \cdot (1 - p(\bar{B}))$$

$$= p(A)\, p(\bar{B})$$ ✓

B 47.) b.) A, B, C unabh. Ereignisse,
d.h. $p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C)$
und A, B, C paarweise unabhängig

z.z.: $p(C \mid A \cap B) = p(C)$

$$p(C \mid A \cap B) = \frac{p(A \cap B \cap C)}{p(A \cap B)} = \frac{p(A) \cdot p(B) \cdot p(C)}{p(A)\, p(B)} = \underline{\underline{p(C)}} \checkmark$$

B 48.)

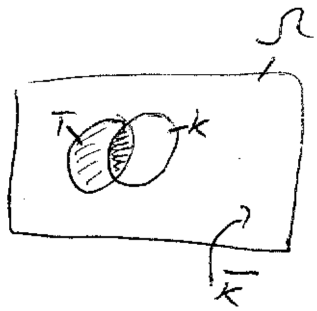
Ereignisse: $T \mathrel{\hat{=}}$ Test positiv
$K \mathrel{\hat{=}}$ Schüler erkrankt

Es gilt: $p(K) = 0{,}01$, $p(T \mid K) = 0{,}9$
$p(T \mid \bar{K}) = 0{,}05$

Ist Ω die Menge aller Schüler, dann bilden K und $\bar{K}$ eine vollständige Ereignisdisjunktion von Ω.

ges.: $p(K \mid T)$

$$p(K \mid T) = \frac{p(T \mid K) \cdot p(K)}{p(T)}$$



$$\begin{aligned} p(T) &= p(T \cap K) + p(T \cap \bar{K}) \\ &= p(T \mid K)\, p(K) + p(T \mid \bar{K}) \cdot p(\bar{K}) \\ &= 0{,}9 \cdot 0{,}01 + 0{,}05 \cdot 0{,}99 = 0{,}0585 \end{aligned}$$

$$p(K \mid T) = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}01}{0{,}0585} = \frac{2}{13} = \underline{\underline{0{,}1538}}$$

AM3 KGÜ 13

~~B~~49.) ges.: P(„genau eine Urne leer")

Es gibt $\binom{n+n-1}{n} = \binom{2n-1}{n}$ Möglichkeiten n Kugeln auf n Urnen zu verteilen (S. 104 f)

Das ~~Ereignis~~ Ereignis entspricht dem Ereignis „genau eine Urne enthält 2 Kugeln". Es müssen n Kugeln auf n-1 Urnen verteilt werden.
Füllt man in jede der n-1 Urnen eine Kugel, bleiben n-1 Möglichkeiten 1 Kugel auf n-1 Urnen zu verteilen.
Für die leere Urne gibt es n Möglichkeiten.
Insgesamt gibt es also $n(n-1)$ Möglichkeiten für „genau eine Urne leer".

$$P(\text{„genau eine Urne leer"}) = \frac{n\cdot(n-1)}{\binom{2n-1}{n}}$$