Übung zu
Grundgebiete der Elektrotechnik III

WS 09/10 - Blatt 5

Aufgabe 28

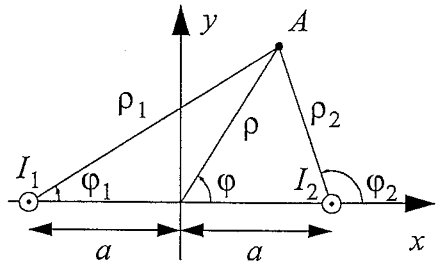


Bild 1

Gegeben sind zwei in z–Richtung unendlich ausgedehnte, parallele Leiter mit Abstand $2\,a$, die von den Strömen I_1 bzw. I_2 durchflossen werden (Bild 1). Ausgehend von der in der Vorlesung hergeleiteten Gesamtfeldstärke $\vec{H}_{\text{ges}}(x, y)$ ist eine parametrische Darstellung der Feldlinien von $\vec{H}_{\text{ges}}$ für $I_1 = I_2 > 0$ bzw. $I_1 = -I_2 > 0$ gesucht. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

a) Zeigen Sie, dass entlang einer Feldlinie von $\vec{H}_{\text{ges}}(x, y)$ gilt: $H_x \cdot \mathrm{d}y = H_y \cdot \mathrm{d}x$.

b) Berechnen Sie dann mithilfe einer unbestimmten Integration $\int H_x \cdot \mathrm{d}y = \int H_y \cdot \mathrm{d}x$ die parametrische Darstellung der Feldlinien.

HINWEIS: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$

c) Welche Dualitäten zum elektrostatischen Feld ergeben sich?

Aufgabe 29

Eine dreieckige, gleichschenklige Leiterschleife der Höhe h und Breite b ist drehbar um die z-Achse gelagert (Bild 2). Sie wird vom Strom I durchflossen und befindet sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{e}_x$.

a) Welches mechanische Drehmoment $\vec{L} = L_z \cdot \vec{e}_z$ wirkt auf die Schleife?

b) Für welche Winkel α_1, α_2 ist das Drehmoment Null? In welcher Lage stellt sich ein stabiles Gleichgewicht ein?

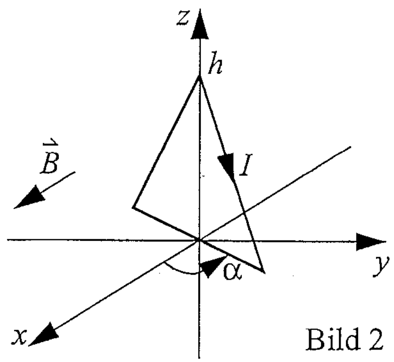


Bild 2

Im Folgenden ist das Magnetfeld ortsabhängig mit $\vec{B} = B_0 \cdot (1 + z/h) \cdot \vec{e}_x$. Gesucht wird wiederum das Drehmoment L_z um die z-Achse.

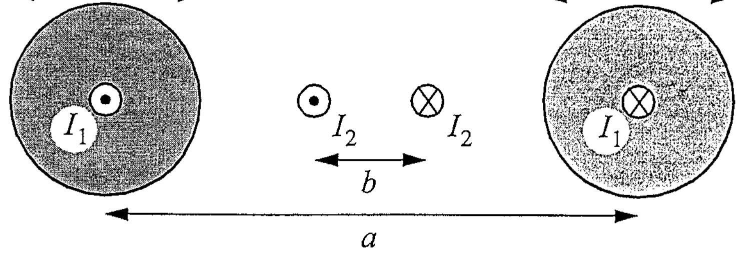
c) Zunächst soll der Beitrag $\mathrm{d}L_z$ eines infinitesimalen Leiterstücks $\mathrm{d}\vec{s}$ berechnet werden. Welche Komponente (in Zylinderkoordinaten) der Kraft $\mathrm{d}\vec{F} = I \cdot \mathrm{d}\vec{s} \times \vec{B}$ trägt zu $\mathrm{d}L_z$ bei? Aus welchen Komponenten von $\mathrm{d}\vec{s}$ und $\vec{B}$ ergibt sich diese Komponente von $\mathrm{d}\vec{F}$?

d) Berechnen Sie die gesuchte Komponente von $\mathrm{d}\vec{F}$ und daraus $\mathrm{d}L_z$.

e) Begründen Sie, warum das in der x-y-Ebene liegende Schleifensegment nicht zu L_z beiträgt. Bestimmen Sie L_z durch Integration über z.

Aufgabe 30

Bild 3



Die beiden äußeren Leiter der abgebildeten Zweidrahtleitung haben den Radius R und den Achsenabstand a. Sie dienen als Hin– und Rückleiter für den Strom I_1. In der Mitte der äußeren Zweidrahtleitung befindet sich eine weitere Zweidrahtleitung mit sehr dünnen Leitern im Abstand b und dem Strom I_2 (Bild 3).

a) Bestimmen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}_1$, die die äußere Zweidrahtleitung zwischen den beiden inneren Leitern erzeugt.

b) Berechnen Sie die längenbezogene äußere Gegeninduktivität L'_{21} der Gesamtanordnung. Bestimmen Sie daraus L'_{12}.

Aufgabe 31

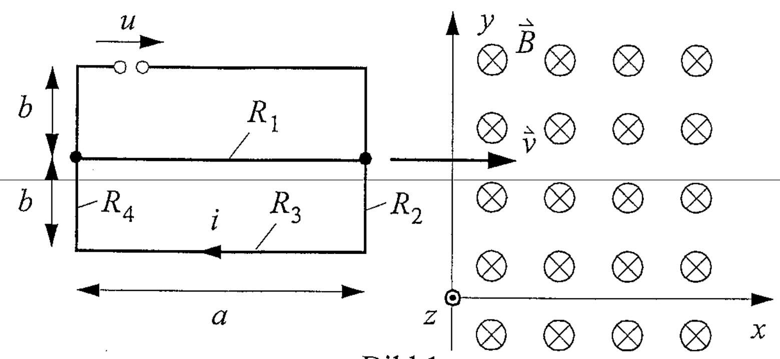


Bild 1

Eine Drahtschleife besteht aus zwei Maschen und bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in das Magnetfeld $\vec{B}$, das sich über die gesamte rechte Halbebene ($x \geq 0$) erstreckt (Bild 1). Zum Zeitpunkt $t = 0$ tritt die rechte Kante der Schleife in das Feld ein. Das vom Strom i verursachte Magnetfeld ist zu vernachlässigen.

a) Wie groß ist der Strom i für $a = 30\text{cm}$, $b = 10\text{cm}$, $v = 1\,\text{ms}^{-1}$, $B = 1\text{T}$ und $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 5\Omega$?

b) Was ergibt sich damit für die Spannung u?

c) Skizzieren Sie $i(t)$ und $u(t)$ im Zeitbereich $0 \leq t \leq 0{,}5\text{s}$.

d) Welcher Strom $i(t)$ ergibt sich, falls $B(t) = 1\text{T} \cdot e^{-t/\tau}$ mit $\tau = 0{,}1\text{s}$?

Aufgabe 32

Gegeben ist ein unendlich langes Koaxialkabel, dessen Innenleiter mit Radius R_1 den Strom I führt. Der Außenleiter (R_2, R_3) dient als Rückleiter (Bild 2).

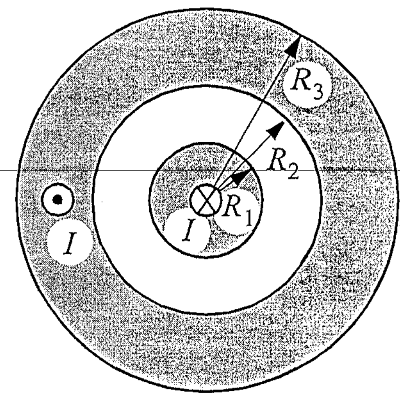


Bild 2

a) Berechnen Sie die längenbezogene innere und äußere Induktivität. Verwenden Sie dabei zunächst die Definition der Induktivität über die Flussverkettung.

b) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit der Definition der Induktivität über die Energie des magnetischen Feldes.

Aufgabe 33

Eine schlanke Zylinderspule der Länge l ist in zwei Lagen mit je N Windungen gewickelt (Bild 3).

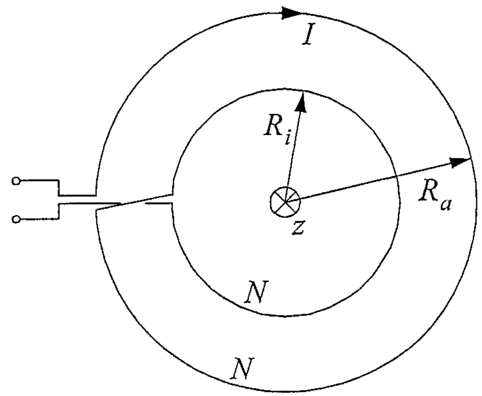


Bild 3

a) Wie groß ist die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ für $\rho < R_i$ und für $R_i < \rho < R_a$?

b) Berechnen Sie die verketteten Flüsse Ψ_i und Ψ_a der inneren und der äußeren Lage.

c) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus b) die Induktivität der Spule.

Aufg. 27.1

a.) Beschleunigung des Elektrons zwischen den Gittern, d.h. eine Umwandlung potentieller Energie in kinetische Energie.

$$-e(U_{e,links} - U_{e,rechts}) = -e(-U) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}} \qquad \vec{v_0} = v_0 \cdot \vec{e_x}$$

b.) Lorentzkraft $\vec{F_m}$ bei $t = 0+$:

$$\vec{F_0} = -e \cdot \vec{v_0} \times \vec{B_0} = -e v_0 \cdot B_0 \cdot (\underbrace{\vec{e_x} \times \vec{e_z}}_{-\vec{e_y}})$$

$$= e v_0 B_0 \vec{e_y}$$

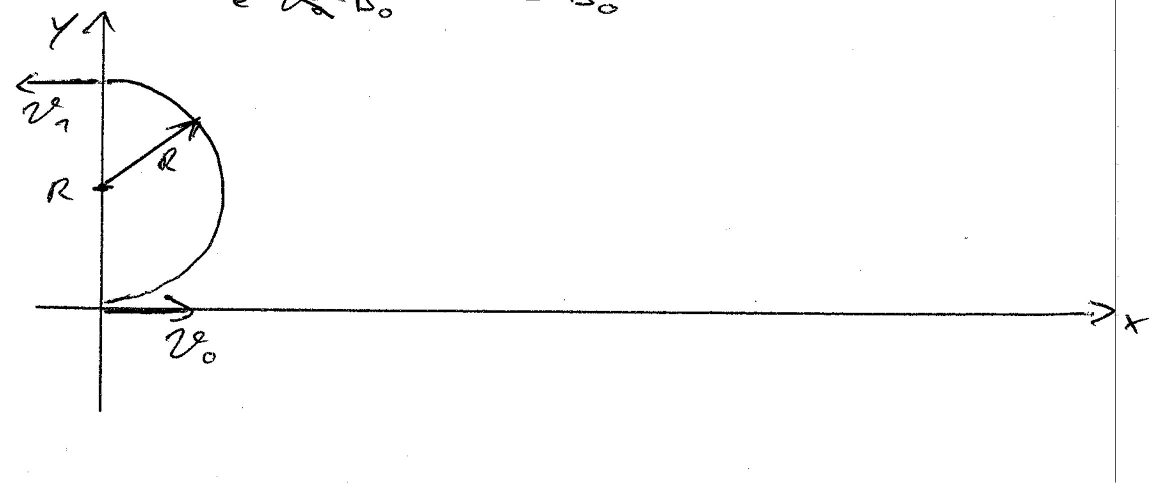
c.) Zur Erinnerung: $W_{mech} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Da stets $\vec{F_m} \perp \vec{v}$, ändert sich nur die Richtung, aber nicht den Betrag d. Geschw. $\vec{v}$.

Weiterhin gilt: $F_m \sim v \cdot B_0 = const$
d.h. der Betrag der Zentripetalkraft ist konstant => die Bahn ist kreisförmig:

$$\vec{F_Z} \stackrel{!}{=} \vec{F_m} \quad \text{also} \quad \frac{m_0 v_0^2}{R} \stackrel{!}{=} e \cdot v_0 \cdot B_0$$

$$R = \frac{m_0 \cdot v_0^{\cancel{2}}}{e \cancel{v_0} \cdot B_0} = \frac{m_0 v_0}{e B_0}$$



d.) Austritt aus dem Magnetfeld bei $x=0$,
$y = 2R = 2\,\frac{m_0 v_0}{e B_0}$, $z=0$

Austrittsgeschw. $\vec{v_1} = -\vec{v_0} = \sqrt{\frac{2\cdot eU}{m_0}}\cdot(-\vec{e_x})$

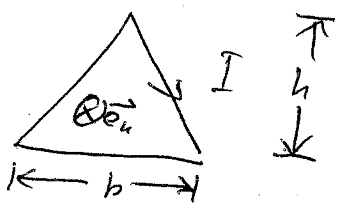
Flugzeit im Magnetfeld:
$t_1 = \frac{\pi R}{v_0} = \frac{\pi\, m_0}{e B_0}$

e.) Die kinetische Energie ändert sich nicht auf der Kreisbahn,
da stets $dW = \vec{F_m}\cdot d\vec{s} \underline{= 0}$

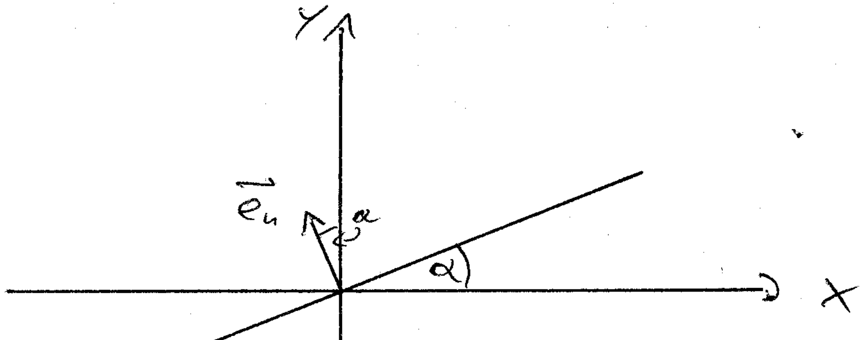
$E_{kin}(t=t_1) = E_{kin}(t=t_0) = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 = eU$

Aufg. 29.)

Leiterschleife:



magn. Moment: $\vec{m} = A\cdot I\cdot \vec{e_n}$
$= \frac{1}{2} b h \cdot I\, \vec{e_n}$



$\vec{e_n} = -\sin(\alpha)\cdot\vec{e_x} + \cos(\alpha)\cdot\vec{e_y}$

a.) $\vec{B} = B_0\cdot\vec{e_x}$ ist homogen, daher
gilt $\vec{L} = \vec{m}\times\vec{B}$

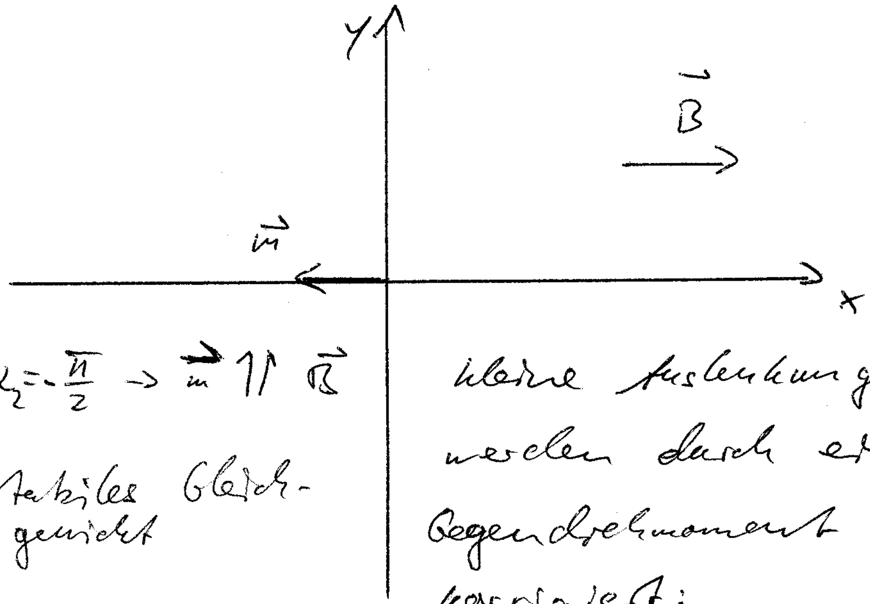
(hier: $L_z = L \cdot \vec{e_z}$!)

$$\vec{L} = \frac{1}{2} b h \, I \cdot B_0 \left[(-\sin(\alpha) \cdot \vec{e_x} + \cos(\alpha) \vec{e_y}) \times \vec{e_x} \right]$$
$$= \frac{1}{2} b h \, I \, B_0 \cos(\alpha) (-\vec{e_z})$$

$\vec{m}$ wird in Richtung von $\vec{B}$ gedreht.

b.) $L_z \overset{!}{=} 0 \iff \cos(\alpha) = 0$

also $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \rightarrow \vec{m} \uparrow\downarrow \vec{B}$



$\alpha_2 = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \vec{m} \uparrow\uparrow \vec{B}$

stabiles Gleichgewicht

kleine Auslenkungen werden durch ein Gegendrehmoment korrigiert:

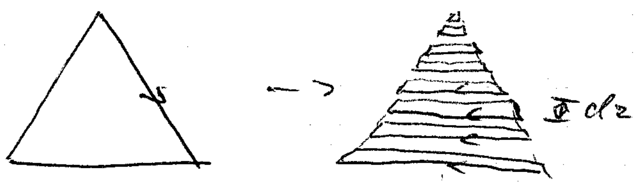
$$L_z(\alpha) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} L_z(\alpha) < 0$$

$$\frac{d}{dx} L_z(\alpha) = \frac{1}{2} b h \cdot \underbrace{I \cdot B_0}_{>0} \cdot \underbrace{\sin(\alpha)}_{<0}$$

erfüllt für $\alpha_2 = -\frac{\pi}{2}$

c.) jetzt $\vec{B} \neq$ const

Wenn man weiter mit $\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$ rechnen will:



alle waagerechten Ströme im Innern kompensieren sich in ihrer Wirkung gegenseitig

---

Ansatz:

1.) Unterteilung der Leiterschleife in Wegstücke $d\vec{s}$

2.) Bestimmung der Teilkräfte

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$$

3.) Bestimmung der Teildrehmomente

$$d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

Hebelarm bzgl. der Drehachse
hier: Ursprung

4.) Integration über alle Anteile $d\vec{L}$

5.) hier: alles von $\vec{L}$ außer L_z wegstreichen, bzw. $L_z = \vec{L} \cdot \vec{e_z}$

Hebelarm: $\vec{r} = \rho \cdot \vec{e_\rho} + \underbrace{z \cdot \vec{e_z}}_{\text{kein Beitrag zu } L_z}$

Wegen $\vec{e_\rho} \times \vec{e_\phi} = \vec{e_z}$
trägt nur die Kraftkomponente dF_ϕ zu L_z bei

jetzt gesucht: welche Komponenten von $d\vec{s}$ und $\vec{B}$ tragen zu F_ϕ bei?

Wegen $\vec{e_z} \times \vec{e_\rho} = \vec{e_\phi}$ sind dies die beiden Kombinationen $ds_z \cdot B_\rho$

oder $\underbrace{ds_\rho \cdot B_z}_{\text{entfällt, da } \vec{B} \text{ keine z-Komponente hat}}$

Auf den Schenkeln der Leiterschleifen ist $d\vec{s} = d\rho \cdot \vec{e_\rho} + dz \cdot \vec{e_z}$

Das Leiterstück der Dreiecksbasis (Länge b) trägt wegen $(d\vec{s} = d\rho \cdot \vec{e_\rho})$ <u>nicht</u> zu L_z bei.

<u>d.)</u> Umwandlung von $\vec{B}$ in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{B} = B_0 \cdot \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cdot \vec{e_x}$$
$$= B_0 \cdot \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cdot \left(\vec{e_\rho} \cdot \cos(\phi) - \vec{e_\phi} \cdot \sin(\phi)\right)$$

$$d\vec{F_\phi} = I \cdot dz \cdot B_\rho = I \cdot dz \cdot B_0 \cdot \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cos(\phi)$$
$$dL_z = \rho \cdot dF_\phi$$

Auf den Schenkeln ist $\rho = \rho(z) = \frac{b}{2}\left(1 - \frac{z}{h}\right)$

$$dL_z = \frac{b}{2} \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot I \cdot dz \cdot B_0 \cdot \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cdot \cos(\phi)$$

e.) Begründung: siehe c.)

$$L_z = \int_{z=0}^{z=h} dL_z = -\frac{2}{3}\cdot h \cdot b \cdot I \cdot B_0 \cdot \cos(\alpha)$$

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

HA: Aufg. 31 bis Di, 26.1.

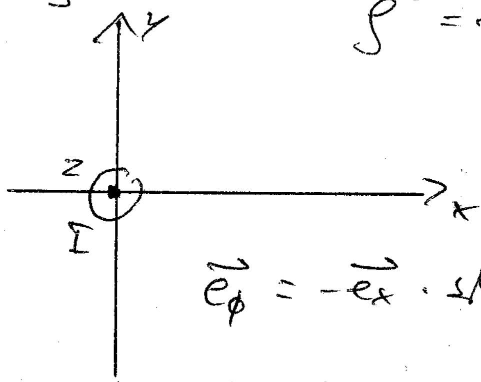
Aufg. 28.) vgl. Aufg. 16!

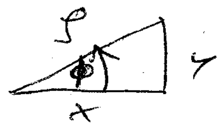
vgl. 4-49 ff

Nur ein Leiter in der z-Achse:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \cdot \vec{e_\phi}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$





$$\vec{e_\phi} = -\vec{e_x} \cdot \sin(\phi) + \vec{e_y} \cos(\phi)$$

$$\rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi(x^2+y^2)} \cdot (-\vec{e_x} \cdot y + \vec{e_y} \cdot x)$$

Verschiebung:

Ersetze I_0 durch I_1 und x durch $x+a$.

Ersetze I_0 durch I_2 und x durch $x-a$

$$\rho_1^2 = (x+a)^2 + y^2 \;;\; \rho_2^2 = (x-a)^2 + y^2$$

(vgl. 4.5.48) Seite 4-50

$$\vec{H}_{ges} = \frac{I_1}{2\pi\rho_1^2} \cdot (-\vec{e_x} \cdot y + \vec{e_y}(x+a)) + \frac{I_2}{2\pi\rho_2^2} \cdot (-\vec{e_x} \cdot y + \vec{e_y}(x-a))$$

GET 3 GÜ 14

19. JAN. 2010

a.) Definition der Feldlinien:

$d\vec{s} \parallel \vec{H} \Rightarrow d\vec{s} \times \vec{H} = 0$

Ebene: $d\vec{s} \times \vec{H} = (dx \cdot \vec{e_x} + dy \cdot \vec{e_y}) \times (H_x \cdot \vec{e_x} + H_y \cdot \vec{e_y})$

$= (dx \cdot H_y - dy \cdot H_x) \cdot \vec{e_z} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow dx \, H_y = dy \cdot H_x$ ✓

vgl. Herleitung der E-Feldlinien