13. JAN. 2010

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 12 vom 11. Januar 2010

Teil A

Aufgabe A42 Beim Werfen einer Münze ergibt sich als Ergebnis Wappen bzw. Zahl. Es werden gleichzeitig drei Münzen geworfen. Geben Sie die Ergebnismenge Ω und die Ereignismenge $\mathcal{E}$ an und bestimmen Sie unter der Voraussetzung, dass es sich um ein Laplace-Experiment handelt, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) dreimal Wappen,

b) einmal Wappen und zweimal Zahl auftritt.

Aufgabe A43 Beim Tennisspiel gewinnt der **Spieler 1** gegen den **Spieler 2** einen Satz mit der Wahrscheinlichkeit p. Bei einem Turnier siegt derjenige Spieler, der zuerst drei Sätze gewonnen hat. Geben Sie die Ergebnismenge Ω und die Ereignismenge $\mathcal{E}$ an und berechnen Sie unter der Voraussetzung, dass es sich um ein Bernoulli-Experiment handelt, die Wahrscheinlichkeit P, mit der **Spieler 1** siegt.

Aufgabe A44 In einer Urne befinden sich zu Beginn r rote und s schwarze Kugeln. Es wird n-mal ($n \leq r + s$) eine Kugel herausgenommen. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, bei n Ziehungen ohne Zurücklegen der gezogenen Kugeln k rote Kugeln zu ziehen,

$$p_k = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$$

beträgt.

Aufgabe A45 Sei $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie vier verschiedene σ-Algebren über Ω an. Wie viele verschiedene σ-Algebren über Ω gibt es?

Teil B

Aufgabe B42 Ein idealer Würfel werde zweimal geworfen. Dann ist ein Elementarergebnis ω ein Zahlenpaar (i, j) mit $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$, wobei i die Augenzahl des ersten und j die Augenzahl des zweiten Wurfs angibt. D.h. $\Omega := \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \ldots, 6\}\}$. Wir betrachten folgende Ereignisse:

A_1 : "Die Augensumme (aus 1. und 2. Wurf) ist größer als 10",
A_2 : "Die Augensumme ist 4",
A_3 : "In beiden Würfen werden gleich viele Augen geworfen",
A_4 : "Die Augensumme sei 4 oder größer als 10",
A_5 : "Die Augensumme sei 4, aber bei den beiden Würfen sollen verschiedene Augenzahlen auftreten".

Geben Sie die Ereignismenge an und berechnen Sie $p(A_1)$, $p(A_2)$, $p(A_3)$, $p(A_4)$, $p(A_5)$.

Aufgabe B43 Ein Schütze treffe bei einem Schuss mit Wahrscheinlichkeit 0,6 ein Ziel. Wie oft muss er in einem Bernoulli-Experiment mindestens schießen, damit er mit Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 das Ziel mindestens einmal trifft? Geben Sie die Ergebnismenge Ω und die Ereignismenge $\mathcal{E}$ an.

Aufgabe B44 Es sei $\mathcal{X} := \{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengensysteme σ-Algebren über $\mathcal{X}$ sind.

a) $\mathcal{A} := \{\emptyset, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

b) $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ (Potenzmenge von $\mathcal{X}$)

c) $\{\emptyset, \mathcal{X}\}$

AM3 KGÜ 12

19. JAN. 2010

B42.) $\Omega = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,\dots,6\}\}$

Gesucht: W'keit folgender Ereignisse:

$A_1 \,\hat{=}$ Augensumme größer als 10

$A_1 = \{(6,5),(5,6),(6,6)\}$

$P(A_1) = \frac{\#A_1}{\#\Omega} = \frac{3}{6^2} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$ $\quad \#A$ = Anzahl_Elemente(A)

$A_2 \,\hat{=}$ Augensumme ist 4

$A_2 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

$P(A_2) = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$

$A_3 \,\hat{=}$ gleich viele Augen in beiden Würfen

$A_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$P(A_3) = \frac{6}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

$A_4 \,\hat{=}$ Augensumme 4 oder größer als 10

$A_4 = A_2 \cup A_1$

$P(A_4) = \frac{6}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

Wahrscheinlichkeiten können einfach addiert werden, sofern sie keine Ereignisse gemeinsam haben.

$A_5 \,\hat{=}$ Augensumme 4, i und j verschieden

$A_5 = A_2 \setminus A_3$

$P(A_5) = \frac{2}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{18}}}$

B43.) $1 \hat{=}$ Treffer, $0 \hat{=}$ kein Treffer

$P(1) = 0{,}6 \qquad P(0) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

ges.: Wie oft muss Schütze schießen, damit er mit W'keit von mind. 0,99 das Ziel mind. 1-mal trifft

$\Omega_i = \{0,1\}$ Ergebnismenge beim i-ten Schuss (Einzelexperiment)

$\Omega = \{\underbrace{(w_1, w_2, \ldots, w_N)}_{\text{bspw. } (0,1,\ldots)} \in \{0,1\}^N \mid N \in \mathbb{N}\}$

$k \hat{=}$ Anzahl d. Treffer

$p(\omega) = \binom{N}{k} \cdot p^k (1-p)^{N-k}$

Setze ein: $N = 3$, $k = 1$

$\binom{3}{1} 0{,}6^1 (0{,}4)^2 \qquad (1,0,0)$

Gültige Schussfolgen:

$(0,0,0,\ldots,1), (1,1,1,\ldots,0), (1,1,0,\ldots,0), (1,\ldots,1)$

Gegenereignis: Wie oft muss Schütze schießen, damit er mit W'keit von höchstens 0,01 das Ziel nie trifft?

$P(w) = \binom{N}{0} p^0 (1-p)^N < 0{,}01$

$= 1 \cdot 1 \cdot 0{,}4^N < 0{,}01$

19. JAN. 2010

$\Leftrightarrow \ln(0{,}4) \cdot N < \ln(0{,}01)$

$\Leftrightarrow N > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}4)} = \underline{5{,}0259}$

d.h. ab 6 Versuchen verfehlt der Schütze das Ziel mit W'keit von höchstens 0,01 immer.

→ trifft mit W'keit von mind. 0,99 mind. einmal.

<u>II 4 a.)</u>

M heißt σ-Algebra über X:

1.) $X \in M$

2.) $A, B \in M \Rightarrow A \setminus B \in M$ $(\Leftrightarrow A \in M \Rightarrow A^c \in M)$

3.) $A_i \in M \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \in M$, $i \in \mathbb{N}$

geg.: $X = \{1,2,3\}$

a.) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$

1.) $X \in \mathcal{A}$ ✓

2.) $\emptyset^c = \{1,2,3\} = X$,

$\{3\}^c = \{1,2\}$,

$\{1,2\}^c = \{3\}$,

$X^c = \{\emptyset\}$

$\forall A \in \mathcal{A}: A^c \in \mathcal{A}$ ✓

3.) $\emptyset \cup A = A$,

$A \cup \mathcal{X} = \mathcal{X}$,

$\{3\} \cup \{1,2\} = \mathcal{X}$ ✓

b.) $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\},$
$\{1,2,3\}, \emptyset\}$

1.) $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ ✓

2.) $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \Rightarrow A \subseteq \mathcal{X} \Rightarrow A^c = \mathcal{X} \setminus A$
$\subseteq \mathcal{X} \Rightarrow A^c \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ ✓

3.) $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) \Rightarrow A_1, A_2 \subseteq \mathcal{X}$
$\Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ ✓

c.) $\{\emptyset, \mathcal{X}\}$

1.) $\mathcal{X} \in \{\emptyset, \mathcal{X}\}$ ✓

2.) $\emptyset^c = \mathcal{X}, \mathcal{X}^c = \emptyset$ ✓

3.) $\emptyset \cup \mathcal{X} = \mathcal{X}$, $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, $\mathcal{X} \cup \mathcal{X} = \mathcal{X}$ ✓