13. JAN. 2010

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 12 vom 11. Januar 2010

Teil A

Aufgabe A42 Beim Werfen einer Münze ergibt sich als Ergebnis Wappen bzw. Zahl. Es werden gleichzeitig drei Münzen geworfen. Geben Sie die Ergebnismenge Ω und die Ereignismenge $\mathcal{E}$ an und bestimmen Sie unter der Voraussetzung, dass es sich um ein Laplace-Experiment handelt, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) dreimal Wappen,

b) einmal Wappen und zweimal Zahl auftritt.

Aufgabe A43 Beim Tennisspiel gewinnt der **Spieler 1** gegen den **Spieler 2** einen Satz mit der Wahrscheinlichkeit p. Bei einem Turnier siegt derjenige Spieler, der zuerst drei Sätze gewonnen hat. Geben Sie die Ergebnismenge Ω und die Ereignismenge $\mathcal{E}$ an und berechnen Sie unter der Voraussetzung, dass es sich um ein Bernoulli-Experiment handelt, die Wahrscheinlichkeit P, mit der **Spieler 1** siegt.

Aufgabe A44 In einer Urne befinden sich zu Beginn r rote und s schwarze Kugeln. Es wird n-mal ($n \leq r + s$) eine Kugel herausgenommen. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, bei n Ziehungen ohne Zurücklegen der gezogenen Kugeln k rote Kugeln zu ziehen,

$$p_k = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$$

beträgt.

Aufgabe A45 Sei $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie vier verschiedene σ-Algebren über Ω an. Wie viele verschiedene σ-Algebren über Ω gibt es?

Teil B

Aufgabe B42 Ein idealer Würfel werde zweimal geworfen. Dann ist ein Elementarergebnis ω ein Zahlenpaar (i, j) mit $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$, wobei i die Augenzahl des ersten und j die Augenzahl des zweiten Wurfs angibt. D.h. $\Omega := \{(i, j) \mid i, j \in \{1, \ldots, 6\}\}$. Wir betrachten folgende Ereignisse:

A_1 : "Die Augensumme (aus 1. und 2. Wurf) ist größer als 10",
A_2 : "Die Augensumme ist 4",
A_3 : "In beiden Würfen werden gleich viele Augen geworfen",
A_4 : "Die Augensumme sei 4 oder größer als 10",
A_5 : "Die Augensumme sei 4, aber bei den beiden Würfen sollen verschiedene Augenzahlen auftreten".

Geben Sie die Ereignismenge an und berechnen Sie $p(A_1)$, $p(A_2)$, $p(A_3)$, $p(A_4)$, $p(A_5)$.

Aufgabe B43 Ein Schütze treffe bei einem Schuss mit Wahrscheinlichkeit $0,6$ ein Ziel. Wie oft muss er in einem Bernoulli-Experiment mindestens schießen, damit er mit Wahrscheinlichkeit von mindestens $0,99$ das Ziel mindestens einmal trifft? Geben Sie die Ergebnismenge Ω und die Ereignismenge $\mathcal{E}$ an.

Aufgabe B44 Es sei $\mathcal{X} := \{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengensysteme σ-Algebren über $\mathcal{X}$ sind.

a) $\mathcal{A} := \{\emptyset, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

b) $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ (Potenzmenge von $\mathcal{X}$)

c) $\{\emptyset, \mathcal{X}\}$

A 42.) Ergebnismenge $\Omega = \{(w,w,w), (w,w,z), (w,z,w), (z,w,w), (w,z,z), (z,w,z), (z,z,w), (z,z,z)\}$

wobei $(a_1, a_2, a_3) :=$ „Münze 1 zeigt $a_1, \ldots$."
und $w \mathrel{\hat{=}}$ Wappen, $z \mathrel{\hat{=}}$ Zahl.

Ereignismenge
$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$

Bsp: (w,w,w) $\{(w,w,w)\}$

Laplace-Exp.: Alle Ergebnisse (Elementar-Ereignisse) sind gleichwahrscheinlich

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{|\Omega|} \quad \forall \omega_i \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \forall A \in \mathcal{E}$

a.) Ereignis $A =$ „drei Mal Wappen" ist
$A = \{(w,w,w)\} \Rightarrow |A| = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P(A) = \frac{1}{8}}}$

b.) Ereignis $B =$ „ein Mal Wappen, zwei Mal Zahl"
$B = \{(w,z,z), (z,w,z), (z,z,w)\}$
$\Rightarrow |B| = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}$

A43.) Bernoulli-Experiment:
n-fache Ausführung eines Einzel-Experiments (jeweils unabh. voneinander), welches selbst nur zwei mögliche Ergebnisse besitzt.

Ergebnismenge d. i-ten Einzelexperiments
$\Omega_i = \{0,1\}$, wobei $0 \hat{=}$ „Spieler 2 gewinnt Satz i"
$1 \hat{=}$ „Spieler 1 gewinnt Satz i"

$P_i(\{1\}) = p \quad \forall i$
$P_i(\{0\}) = 1 - P_i(\{0\}^c) = 1 - P_i(\{1\}) = 1-p$
Ergebnismenge d. Gesamtexp. (Turniers)

$$\Omega = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \mid \alpha_i \in \Omega_i \ \forall 1 \le i \le N, \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 3 \wedge \sum_{i=1}^{N}(1-\alpha_i) < 3\right) \vee \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i < 3 \wedge \sum_{i=1}^{N}(1-\alpha_i) = 3\right)$$

$\wedge\ \alpha_N = 1$

$\wedge\ \alpha_N = 0$

$= \{(1,1,1), (0,0,0),$
$(0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,0,1),$
$(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0),$
$(0,0,1,1,1), (0,1,0,1,1), (0,1,1,0,1), (1,0,0,1,1), (1,0,1,0,1)$
$(1,1,0,0,1),$
$(1,1,0,0,0), \dots (0,0,1,1,0)\}$

$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$
$A =$ „Spieler 1 gewinnt das Turnier."
$= \{(1,1,1), (0,1,1,1), \dots, (1,1,0,1), (0,0,1,1,1), \dots,$
$(1,1,0,0,1)\}$

$$\underbrace{(1,1,1)}_{p^3},\ \underbrace{(0,1,1,1)}_{(1-p)\cdot p^3},\ \underbrace{(0,0,1,1,1)}_{(1-p)^2\cdot p^3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{P}(A) = p^3 + 3\cdot(1-p)p^3 + 6\cdot(1-p)^2\cdot p^3}}$$

<u>A44.)</u> Urne: r rote, s schwarze Kugeln

Daraus werden ohne zurücklegen n Kugeln gezogen.

P_k ... Wahrsch., dass genau k rote Kugeln gezogen werden.

zu zeigen: $P_k = \dfrac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$

Jede Kugel wird mit gleicher Wahrsch. gezogen. $\Rightarrow$ Laplace - Experiment

$$\mathbb{P} = \frac{\#\text{ günstige Fälle}}{\#\text{ mögliche Fälle}}$$

Beim Ziehen ohne Zurücklegen von n Kugeln aus $r+s$ gibt es $\binom{r+s}{n}$ Möglichkeiten.

Einen günstigen Fall erhält man, falls man k rote und $n-k$ schwarze Kugeln gezogen hat.

$\Rightarrow \binom{r}{k}\cdot\binom{s}{n-k}$ günstige Fälle

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_k = \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}}}$$

A45.) $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ gesucht: alle σ-Algebren $\mathcal{A}$ über Ω.

Def.: $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra über Ω.

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$
- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Im endlichen Fall, d.h. $|\Omega| < \infty$ ist dies äquivalent zu $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

Konstr. nun alle σ-Algebren über Ω

1. Fall: $\mathcal{A}$ enthält ein-elementige Mengen

1.1.: davon genau eine

o.B.d.A.: $\{1\}$

$\Rightarrow \mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3,4\}, \Omega\} \Rightarrow$ 4 Möglichkeiten

1.2.: genau zwei ein-elementige Mengen

o.B.d.A.: $\{1\}, \{2\}$

$\Rightarrow \mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \Omega\}$

$\Rightarrow \binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten

1.3.: genau 3 ein-elementige Mengen

o.B.d.A.: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

$\Rightarrow \{4\} = \{1,2,3\}^c = (\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\})^c \in \mathcal{A}$ ↯

1.4.: alle 4 ein-elementigen Mengen

$\Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow 1$ Möglichkeit

2. $\mathcal{A}$ enthält als kleinste nicht-leere Menge eine 2-elementige Länge

2.1.: genau eine

o.B.d.A.: $\{1,2\} \in \mathcal{A} \Rightarrow \{3,4\} = \{1,2\}^c \in \mathcal{A}$ ↯

2.2.: genau zwei

2.2.1.: die beiden sind disjunkt

o.B.d.A.: $\{1,2\}, \{3,4\}$

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \Omega\}$

$\Rightarrow \frac{6}{2} = 3$ Möglichkeiten

2.2.2.: die beiden sind nicht disjunkt

o.B.d.A.: $\{1,2\}, \{2,3\} \Rightarrow \{2\} = \{1,2\} \cap \{2,3\} \in \mathcal{A}$ ↯

2.3. ≥ 3 ↯ analog 2.2.2.

3. $\mathcal{A}$ enth. als kleinste nicht-leere Menge eine drei-elementige

o.B.d.A.: $\{1,2,3\} \in \mathcal{A} \Rightarrow \{4\} = \{1,2,3\}^c \in \mathcal{A}$ ↯

4. $\mathcal{A}$ enthält als kleinste nicht-leere Menge Ω.

$\Rightarrow \mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\} \Rightarrow 1$ Möglichkeit

Insgesamt: $\underset{1.1.}{4} + \underset{1.2.}{6} + \underset{1.4.}{1} + \underset{2.2.1.}{3} + \underset{4.}{1} = \underline{\underline{15}}$