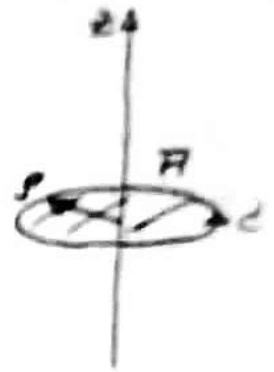
a) Symmetrieüberlegung:

Die Anordnung und damit $\vec{H}$ ist invariant bzgl. einer Verschiebung in z-Richtung und einer Drehung um die z-Achse. Daraus folgt, dass H_ρ, H_φ und H_z unabhängig von φ und z sind, also

$$\vec{H}(\vec{r}) = H_\rho(\rho)\cdot\vec{e}_\rho + H_\varphi(\rho)\cdot\vec{e}_\varphi + H_z(\rho)\cdot\vec{e}_z$$

Anwendung des Durchflutungsgesetzes auf eine Fläche A mit Randkurve C

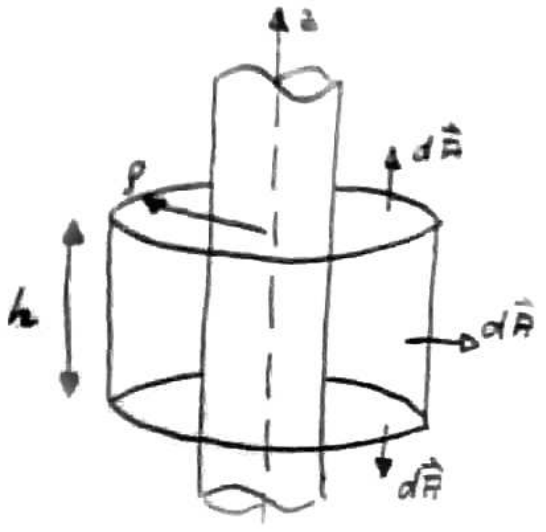


$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J}\cdot d\vec{A} \qquad \left(\text{stationärer Fall } \frac{\partial B}{\partial t} = 0\right)$$

$$\Rightarrow H_\varphi(\rho)\cdot 2\pi\rho = 0 \qquad \text{da } \vec{J} \perp d\vec{A}$$

$\underline{H_\varphi(\rho) = 0}$ für $\rho \leq R$ und $\rho > R$

b) Hüllfläche A:



$$\oiint_{A} \vec{H} \cdot d\vec{A}$$

$$= \underbrace{\iint_{A_{Mantel}} H_\rho(\rho) \cdot dA}_{= H_\rho(\rho) \cdot 2\pi\rho \cdot h} + \underbrace{\iint_{A_{Deckel}} H_z(\rho) \cdot dA - \iint_{A_{Boden}} H_z(\rho) \cdot dA}_{=0} \stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{H_\rho(\rho) = 0}}$ für $\rho \leq R$ und $\rho > R$

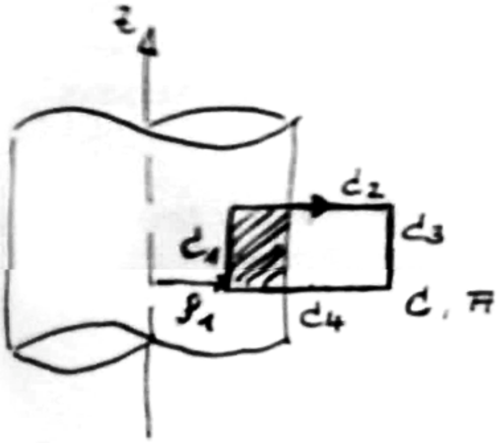
c) Pro Umdrehung mit der Dauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ tritt die Ladung $Q_A = \sigma_e \cdot 2\pi R \cdot h$ durch A hindurch.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$I_A = \frac{Q_A}{T} = \frac{\sigma_e \cdot 2\pi R \cdot h}{2\pi} \cdot \omega = \underline{\underline{\sigma_e \cdot R \cdot h \cdot \omega}}$$

$$I_A = \sigma_e \cdot R \cdot \omega$$

d)



Umlaufsinn der Randkurve C im Rechtsschraubensinn mit $d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_\varphi$ verknüpft.

Zu $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s}$ liefern die Segmente c_2 und c_4 keinen Beitrag, da hier $\vec{H} \perp d\vec{s}$.

c_3 liefert keinen Beitrag, da hier $\vec{H} = 0$.

Also $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{c_1} \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_z(\rho_1) \cdot h$

$$\stackrel{!}{=} I_A = \sigma_e \cdot R \cdot h \cdot \omega \quad \text{für } \rho_1 \leq R$$

rechte Seite des Durchflutungsgesetzes

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{H}(\vec{r}) = \sigma_e \cdot R \cdot \omega \cdot \vec{e}_z}} \qquad \text{für } \rho < R$$

(ρ_1 ersetzt durch ρ)

e) Die bewegte Raumladung erzeugt ein stationäres Strömungsfeld $\vec{J}(\vec{r})$

$$\vec{J} = \vec{v} \cdot \rho_{e0} \qquad \text{mit} \quad \vec{v}(\vec{r}) = \omega \cdot \rho \cdot \vec{e}_\varphi \qquad (\text{für } \rho < R)$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \omega \cdot \rho_{e0} \cdot \rho \cdot \vec{e}_\varphi \quad \text{für } \rho < R \qquad \text{hier: } \vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$$

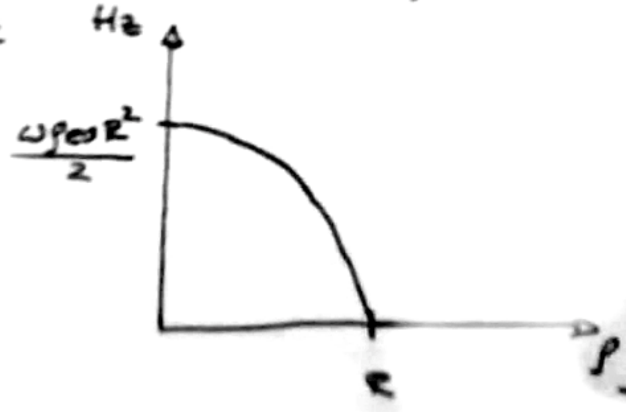
Durchflutungsgesetz auf Fläche A angewendet:

$$\underbrace{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s}}_{= H_z(\rho_1) \cdot h} = \underbrace{\iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}}_{= \omega \cdot \rho_{e0} \cdot h \cdot \int_{\rho=\rho_1}^{R} \rho \cdot d\rho \, = \, \frac{\omega \cdot \rho_{e0} \cdot h}{2} \cdot (R^2 - \rho_1^2)}$$

Also $\underline{\underline{\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\omega \cdot \rho_{e0}}{2} \cdot (R^2 - \rho^2)}}$ für $\rho < R$

(ρ_1 ersetzt durch ρ) $\leftarrow$ weil nur der Weg C_1 einen Beitrag liefert

[Anmerkung: Skizze



]

f) Das Durchflutungsgesetz in differentieller Form, $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}$ (stationärer Fall!), vereinfacht sich wegen $\vec{H}(\vec{r}) = H_z(\rho) \cdot \vec{e}_z$ zu

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{J} = J_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

also $$-\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \overset{\rho<R}{=} -\frac{\omega \cdot \rho_{e0}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\left[R^2 - \rho^2\right]$$

$$= +\omega \cdot \rho_{e0} \cdot \rho = J_\varphi(\rho) \quad \text{q.e.d.}$$

[Anmerkung: $-\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \overset{\rho>R}{=} 0 = J_\varphi(\rho)$]

g) Jetzt

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \cdot \vec{e}_\varphi = -\omega \cdot \rho_{e0} \cdot \left[2\rho \cdot \left(1 - \frac{\rho}{R}\right) - \frac{\rho^2}{R}\right] \cdot \vec{e}_\varphi$$

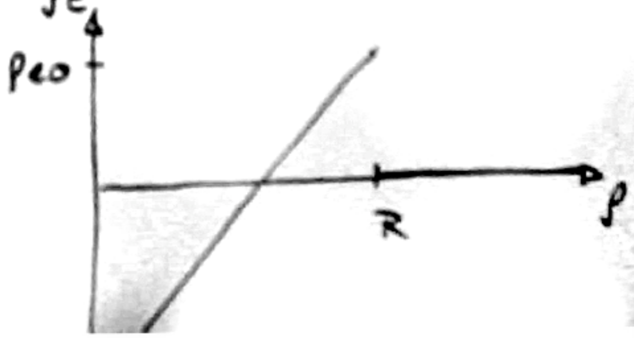
$$= +\omega \cdot \rho_{e0} \cdot \left[3 \cdot \frac{\rho^2}{R} - 2\rho\right] \cdot \vec{e}_\varphi$$

D.h. $$\boxed{J_\varphi(\rho) = \omega \cdot \rho \cdot \rho_e(\rho)}$$

$$\overset{!}{=} \omega \cdot \rho_{e0} \cdot \left[3 \frac{\rho^2}{R} - 2\rho\right]$$

$$\rho_e(\rho) = \rho_{e0} \cdot \left[3 \frac{\rho}{R} - 2\right]$$

[Anmerkung: Skizze



]