Übung zu

Grundgebiete der Elektrotechnik III

WS 09/10 - Blatt 4

Aufgabe 21

Ein Plattenkondensator mit quadratischen Platten der Kantenlänge l im Abstand d ist bis zur Höhe h mit einem Dielektrikum der relativen Permittivität ε_r gefüllt (Bild 1). Zwischen den Platten liegt die konstante Spannung U_0 an. Streueffekte des elektrischen Feldes sind zu vernachlässigen.

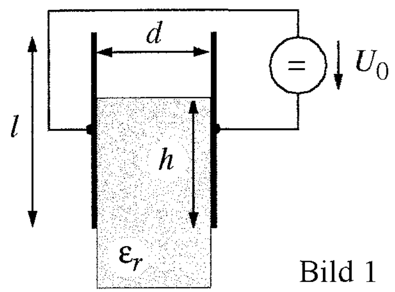


Bild 1

a) Berechnen Sie die Kapazität $C(h)$, die Energie $W_C(h)$ und die Ladung $Q(h)$ des Kondensators abhängig von der Position des Dielektrikums.

b) Das Dielektrikum wird von h_1 bis h_2 $(h_2 > h_1)$ in den Kondensator geschoben. Welche Ladung ΔQ wird von der Spannungsquelle geliefert? Welche elektrische Energie ΔW_Q wird dabei von der Spannungsquelle abgegeben?

c) Welche mechanische Arbeit $W_{\text{mech}} > 0$ wird beim Verschieben aufgewendet? Stellen Sie dazu eine Energiebilanz auf.

d) Geben Sie abhängig von h die auf das Dielektrikum ausgeübte Kraft an.

Aufgabe 22

In ein ursprünglich homogenes elektrostatisches Feld $\vec{E}_0 = E_0 \cdot \vec{e}_z$ wird eine dielektrische Kugel mit dem Radius R und der Permittivität $\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ eingebracht (Bild 2). Außerhalb der Kugel gilt $\varepsilon = \varepsilon_0$. Für das resultierende elektrostatische Feld der Anordnung kann der folgende Lösungsansatz gewählt werden:
$\vec{E}_i = E_i \cdot \vec{e}_z$ für $|\vec{r}| < R$ (innen) und $\vec{E}_a = \vec{E}_0 + \vec{E}_D$ für $|\vec{r}| > R$ (außen). $\vec{E}_D$ beschreibt dabei das elektrische Feld eines Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{p} = p \cdot \vec{e}_z$ (vgl. Aufgabe 14).

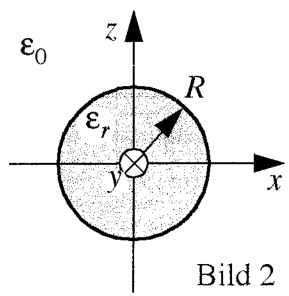


Bild 2

a) Formulieren Sie den Lösungsansatz innerhalb und außerhalb der Kugel in Kugelkoordinaten.

b) Stellen Sie mit den Grenzflächenbedingungen für die elektrische Feldstärke und die elektrische Flussdichte an der Kugeloberfläche ($r = R$) zwei Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten E_i und p auf.

c) Berechnen Sie die Unbekannten E_i und p in Abhängigkeit von den bekannten Größen E_0 und ε_r.

d) Überprüfen Sie das Ergebnis aus c) für den Spezialfall $\varepsilon_r = 1$.

e) Was ergibt sich für den Grenzfall $\varepsilon_r \to \infty$?

Aufgabe 23

Zwischen zwei ideal leitenden, parallelen Platten mit der Fläche A und dem Abstand d befindet sich ein Medium mit der Leitfähigkeit σ und der Permittivität ε. Die Platten werden an eine Spannungsquelle U angeschlossen. Streueffekte sind zu vernachlässigen.

a) Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$, die elektrische Stromdichte $\vec{J}$ und die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ zwischen den Platten.

b) Welche Ladung $\pm Q$ tragen die Platten? Wie groß sind die Kapazität C und der elektrische Widerstand R der Anordnung? Geben Sie einen Zusammenhang zwischen R und C an.

c) Zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird die Spannungsquelle abgetrennt. Geben Sie den zeitlichen Verlauf von $Q(t)$ und $\vec{E}(t)$ an.

Aufgabe 24

Eine unendlich lange Linienladung q_L befindet sich jeweils im Abstand a vor zwei rechtwinklig angeordneten, leitenden Halbebenen (Bild 3). Eine Halbebene hat das Potential U, die andere das Potential Null. Es gilt $\varepsilon = \varepsilon_0$.

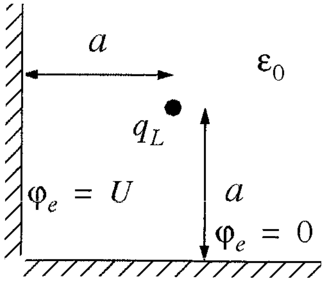


Bild 3

a) Bestimmen Sie das elektrische Feld der Linienladung zunächst für $U = 0$ mithilfe der Spiegelungsmethode.

b) Berechnen Sie das gesamte elektrische Feld durch Überlagerung des Feldes aus a) mit dem eines Winkelkondensators für $U > 0$.

Aufgabe 25

Zwischen einem axial unendlich ausgedehnten, ideal leitenden Zylinder mit dem Radius a und einer dazu parallelen, ideal leitenden, geerdeten Ebene im Abstand $b - a$ liegt die Spannung U an. Der Halbraum um den Zylinder herum hat den spezifischen Widerstand ρ (Bild 4).

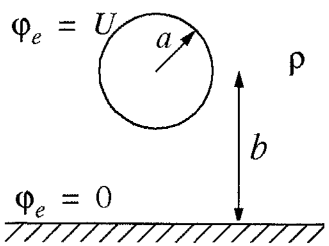


Bild 4

a) Welchem elektrostatischen Problem entspricht diese Anordnung?

b) Bestimmen Sie das elektrische Potential φ_e und das stationäre Strömungsfeld $\vec{J}$ zwischen Zylinder und Ebene.

c) Welcher Strom pro Längeneinheit I' tritt aus dem Zylinder aus?

Aufgabe 26

Gegeben ist ein halber Zylinderkondensator mit dem Innenradius ρ_i, dem Außenradius ρ_a und der Länge l (Bild 5). Der Kondensator ist mit einem Material der Permittivität ε gefüllt. Randeffekte sind zu vernachlässigen.

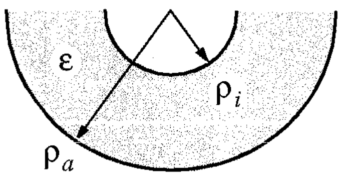


Bild 5

a) Wie groß sind die Kapazität C bzw. die längenbezogene Kapazität C' der Anordnung?

b) Betrachten Sie das analoge Problem des stationären Strömungsfeldes, d.h. das Füllmaterial hat die Leitfähigkeit σ. Ist hier die Angabe eines längenbezogenen Widerstandes (R') oder eines längenbezogenen Leitwertes (G') sinnvoll? Bestimmen Sie diese Größe.

c) Skizzieren Sie die Feldlinien und die Lage der Äquipotentialflächen des entsprechenden stationären Strömungsfeldes.

d) Welches ist die duale Struktur der Anordnung?

e) Bestimmen Sie den längenbezogenen Leitwert G' dieser Anordnung.

Aufgabe 27

Ein Elektron (Ladung $-e$, Masse m_0) wird zwischen zwei Metallgittern mit der Spannung U beschleunigt und erreicht zum Zeitpunkt $t = 0$ ein homogenes Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}_0$, welches nur im Bereich $x \geq 0$ existiert (Bild 6).

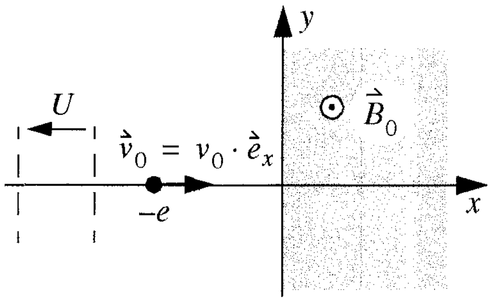


Bild 6

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit $v_0 \ll c$ beim Eintritt in das Magnetfeld?

b) Berechnen Sie die Lorentz–Kraft $\vec{F}_0$, die für $t = 0$ auf das Elektron wirkt.

c) Warum bewegt sich das Elektron im Bereich des Magnetfeldes auf einer Kreisbahn? Berechnen Sie den Radius der Kreisbahn.

HINWEIS: Zentripetalkraft einer Kreisbahn mit Radius R: $F_z = m_0 \cdot v^2/R$

d) Wo, zu welchem Zeitpunkt t_1 und in welcher Richtung verlässt das Elektron das Magnetfeld?

e) Welche kinetische Energie hat das Elektron vor dem Eintritt in das Magnetfeld und nach dem Austritt?

GET3 GÜ

12. JAN. 2010

HA bis Di, 19.1.10 : Aufg. 29

Fortsetzung Aufg. 22

b.) zwei Unbekannte: E_i, p

benötigt: Zwei Gleichungen aus den Grenzflächenbedingungen

1.) $E_{i,t} \stackrel{!}{=} E_{a,t}$ hier: $E_\phi = 0$ innen & außen

$E_{i,\theta}(r=R) \stackrel{!}{=} E_{a,\theta}(r=R)$

$-E_i \cdot \sin(\theta) = -E_0 \cdot \sin(\theta) + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R^3} \cdot \sin(\theta)$

$\forall \theta \in [0, \pi]$

$\rightarrow E_i = E_0 - \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ (1)

2.) Normalkomponente von $\vec{D}$

! keine freien Flächenladungen vorhanden

$D_{i,n} \stackrel{!}{=} D_{a,n}$ auf dem Rand der Kugel

Aus Materialgleichung:

$\vec{D_i} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E_i}$

$\vec{D_a} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E_a}$

$D_{i,n} = \vec{D_i} \cdot \vec{e_r}$

$D_{a,n} = \vec{D_a} \cdot \vec{e_r}$

Damit $D_{i,r}(r=R) \stackrel{!}{=} D_{a,r}(r=R)$

$\varepsilon_r \varepsilon_0 E_i \cos(\theta) = \varepsilon_0 E_0 \cos(\theta)$

$+ \varepsilon_0 \cdot \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R^3} \cdot 2\cos(\theta)$

$\forall (\theta) \in [0;\pi]$

$\rightarrow \varepsilon_r \cdot E_i = E_0 + \frac{p}{2\pi \varepsilon_0 R^3}$ (2)

c.) $2 \cdot (1) + (2)$:

$(2+\varepsilon_r) E_i = 3 E_0 \iff E_i = \frac{3}{2+\varepsilon_r} \cdot E_0$

Einsetzen in (1):

$\frac{3}{2+\varepsilon_r} \cdot E_0 = E_0 - \frac{p}{4\pi \varepsilon_0 R^3}$

$\iff p = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \cdot 4\pi R^3 \cdot \varepsilon_0 \cdot E_0$

$\vec{p}$ entspr. dem Gesamtdipolmoment der polarisierten Kugel.

Es ist $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$

Hier ist $\vec{P}$ in der Kugel homogen

$\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \underbrace{(\varepsilon_r - 1)}_{\chi_e} \varepsilon_0 \vec{E_i}$ (Skript: 2.5.3.)

d.) Betrachte $\varepsilon_r = 1$, d.h. $\varepsilon_{innen} = \varepsilon_{außen} = \varepsilon_0$

Die Kugel hat keinen Einfluss auf das äußere Feld $\vec{E_0}$.

$E_i = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} \cdot E_0 = E_0$ ✓

$p = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r - 2} \cdot 4\pi \varepsilon_0 \cdot R^3 \cdot E_0 = 0$ ✓

12. JAN. 2010

GET3 GÜ

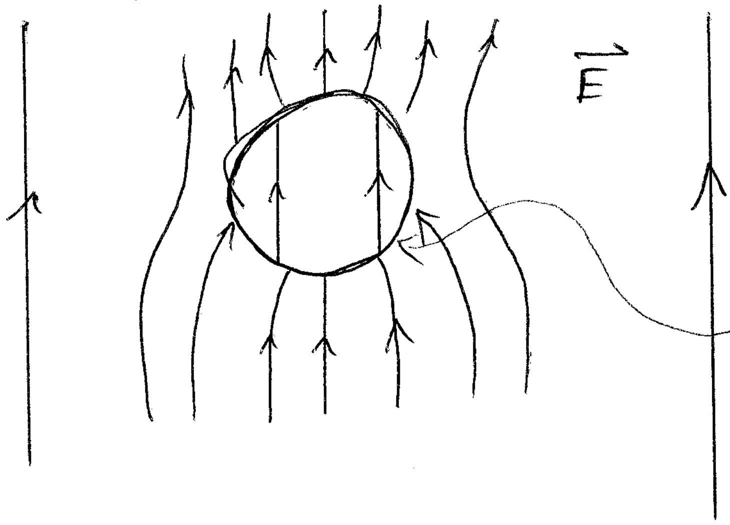
e) Betrachte $\varepsilon_r \to \infty$:

$$E_i = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} \cdot E_0 \xrightarrow{\varepsilon_r \to \infty} 0$$

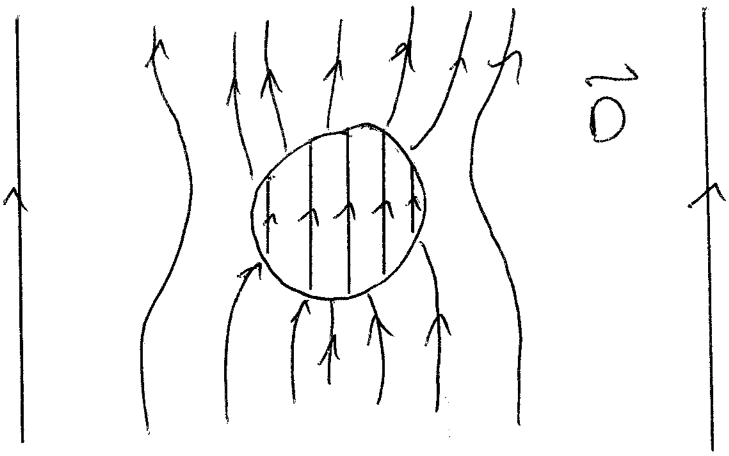
$$p = \ldots \xrightarrow{\varepsilon_r \to \infty} 4\pi\,\varepsilon_0 \cdot R^3 \cdot E_0$$

analog zu der metallisierten Kugel.

Ergänzung: Feldlinienbilder



NICHT rechtwinklig auf Oberfläche, da die Kugel nicht metallisch ist.



im Außenraum ~~der~~ identisch wie $\vec{E}$-Feld

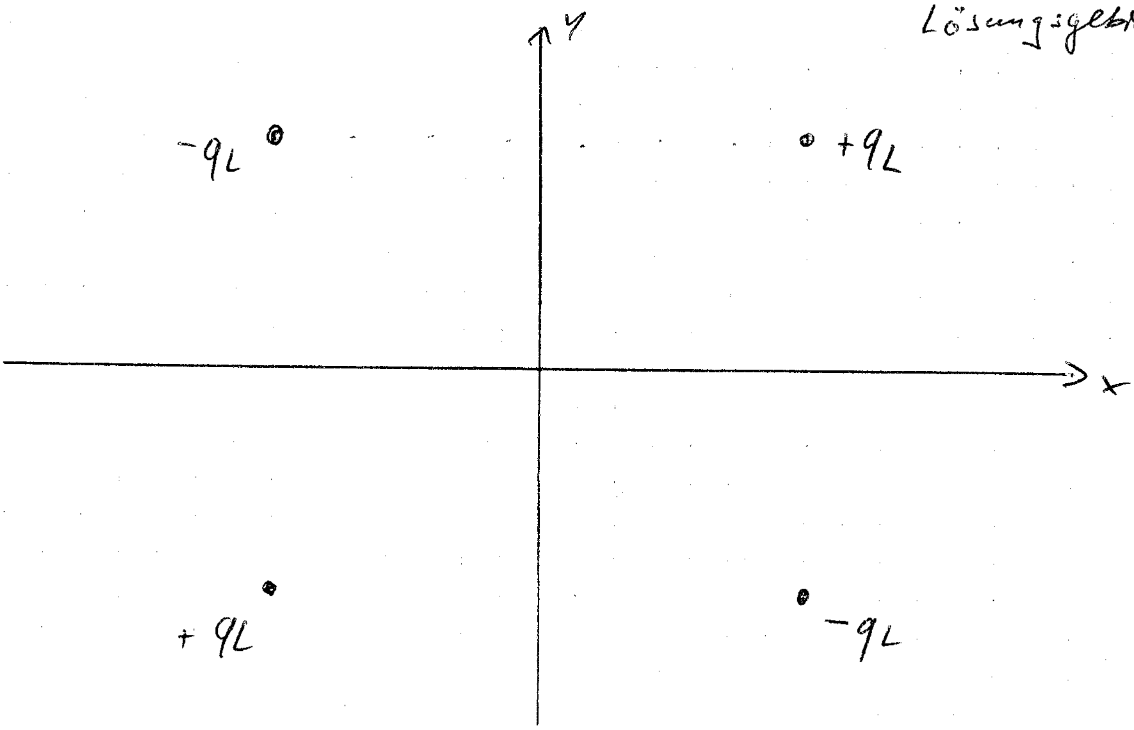
keine beginnenden oder endenden $\vec{D}$-Feldlinien, da keine freien Ladungen

A24.)

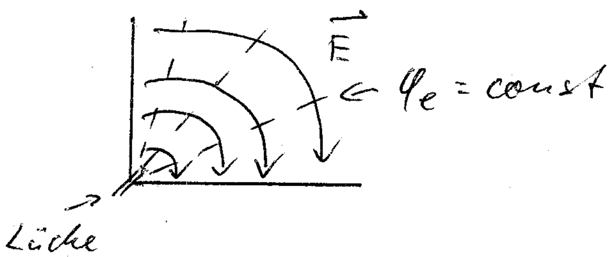
nur Skizze, bitte selbst rechnen

a.)

1. Quadrant Lösungsgebiet



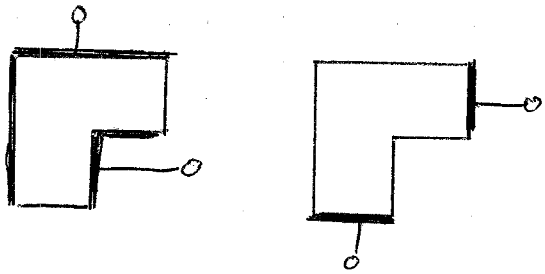
b.) Teilproblem: Winkelkondensator



$$\varphi_{e,ges} = \varphi_{e\,a.)} + \varphi_{e\,b.)}$$

A26.) „analoges Problem": $\sigma \leftrightarrow \varepsilon$

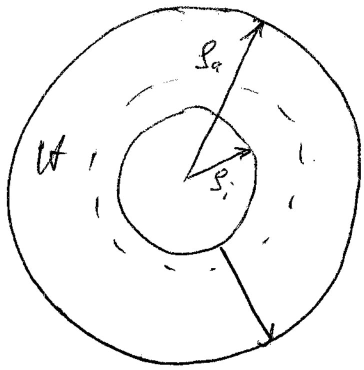
„duale Strukturen":



(Vertauschen von Feldlinien und Äquipotenzialflächen

GET3 Gü

a.) Betrachte zunächst vollständigen Zylinderkondensator:



Das Feld zwischen den Elektroden entspricht dem Feld einer LL in der z-Achse

$$\vec{E} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{\vec{e_\varrho}}{\varrho}$$

$$C_{voll} = \frac{\oiint \vec{D}\, d\vec{A}}{\int_1^2 \vec{E}\, d\vec{s}} = \frac{q_L \cdot l}{U_{12}}$$

$$U_{12} = \int_{\varrho=\varrho_i}^{\varrho_a} E_\varrho(\varrho) \cdot d\varrho = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{\varrho_a}{\varrho_i}\right)$$

$$\rightarrow C_{voll} = \frac{2\pi\varepsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{\varrho_a}{\varrho_i}\right)}$$

hier: $C = C_{halb} = \frac{1}{2} C_{voll} = \frac{\pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{\varrho_a}{\varrho_i}\right)}$

$$\rightarrow C' = \frac{C}{l} = \frac{\pi \cdot \varepsilon}{\ln\left(\frac{\varrho_a}{\varrho_i}\right)}$$

∇ Streufelder vernachlässigt!

b.) Analoges Problem:
(gleiches E-Feld, anderes Material)

$R \sim \frac{1}{l}$ $\qquad R' = \frac{R}{l} \sim \frac{1}{l^2}$ nicht sinnvoll

$G \sim l$ (analog zu $C \sim l$)

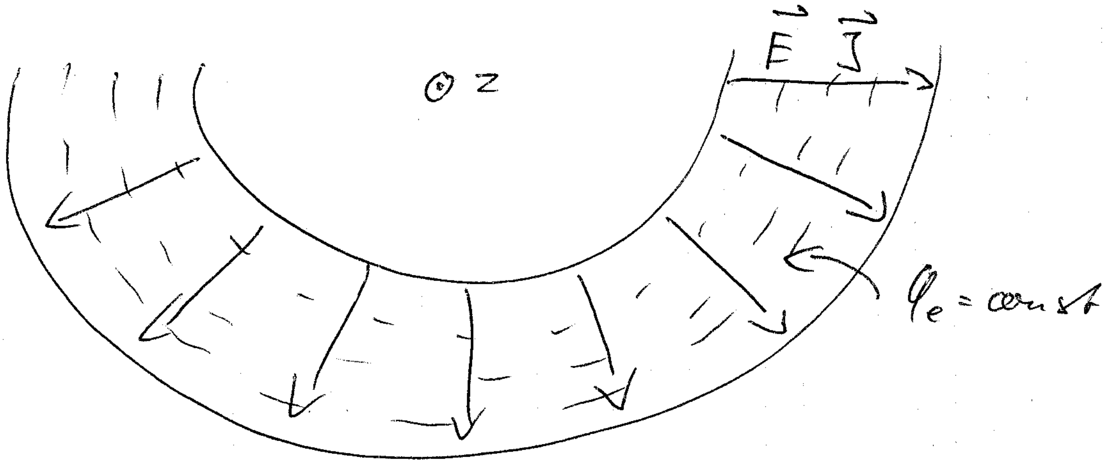
$G' = \frac{G}{l} \neq f(l)$

$\rightarrow$ G' sinnvoll

für $\frac{\varepsilon}{\sigma} = R \cdot C = \frac{1}{G} \cdot C = \frac{C' \cdot l}{G' \cdot l} = \frac{C'}{G'}$

$\rightarrow G' = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot C' = \frac{\pi \cdot \sigma}{\ln\left(\frac{\rho_a}{\rho_i}\right)}$

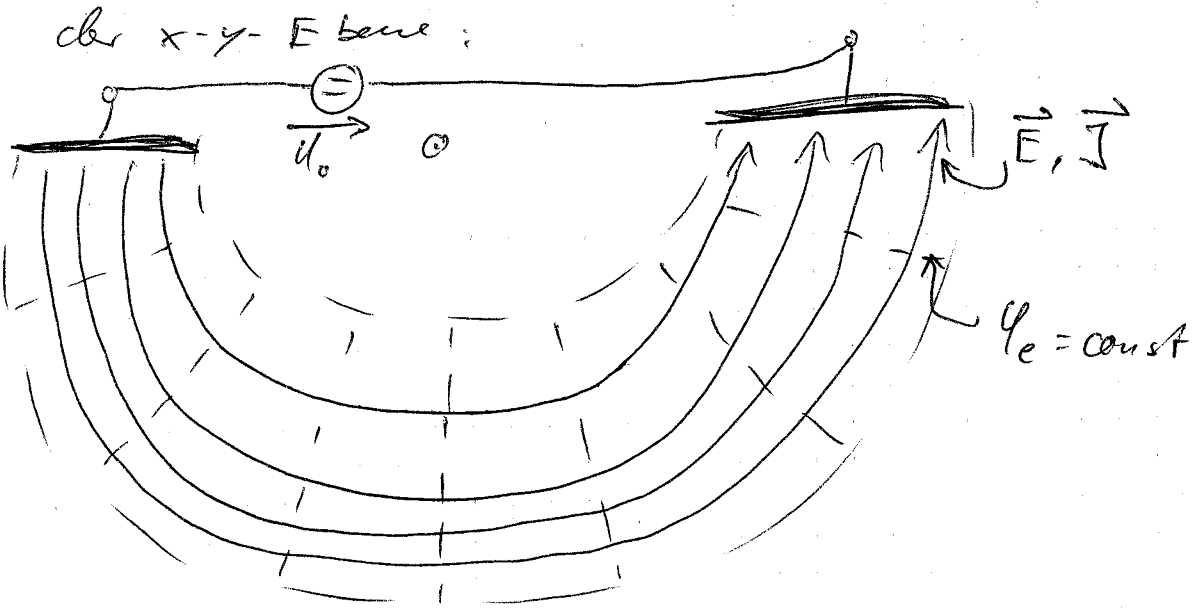
c)



$\vec{E}$-Feld ist für G' und C' gleich!

d) Duale Struktur:

Vertauschung von Feldlinien und Schnittlinien der Äquipotentialflächen in der x-y-Ebene:



e.) vgl. Winkelkondensator

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_\phi(\varrho) \cdot \vec{e_\phi}$$

$$U_0 = \int_1^2 \vec{E}\, d\vec{s} = E_\phi(\varrho) \cdot \pi \cdot \varrho$$

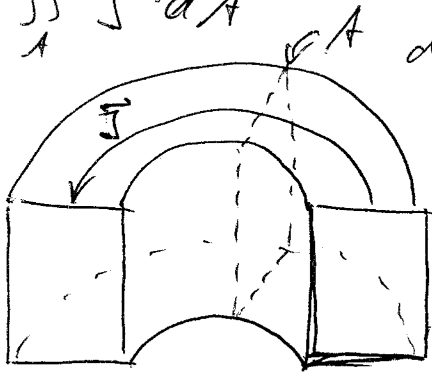
Integration entlang eines Kreisbogens:
$\varrho = const \rightarrow E_\phi = const$

Also $\vec{E_\phi}(\varrho) = \frac{U_0}{\pi \varrho}$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma \frac{U_0}{\pi \varrho} \cdot \vec{e_\varrho}$$

$$I = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

A $\quad d\vec{A} = dz \cdot d\varrho \cdot \vec{e_\phi}$



$$I = \iint_A \vec{J}\, d\vec{A} = \int_{z=0}^{l} \int_{\varrho=\varrho_i}^{\varrho_a} \frac{\sigma \cdot U_0}{\pi \cdot \varrho} \cdot d\varrho\, dz$$

$$= l \cdot \frac{\sigma U_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{\varrho_a}{\varrho_i}\right)$$

$$G'_{e.)} = \frac{G}{l} = \frac{1}{l} \cdot \frac{I}{U_0} = \frac{\sigma}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{\varrho_a}{\varrho_i}\right)$$

Vergleich mit der Originalanordnung b.):

$$\frac{G'_{e)}}{\sigma} = \frac{\sigma}{G'_{b)}} \quad \text{analog} \quad \frac{C'_{e)}}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{C'_{b.)}}$$

Aufg. 27.)

$$W_{el} = -e \cdot (-U) \stackrel{!}{=} \frac{m_0 v_0^2}{2}$$

$\frac{v_0}{c}$ für $U = 1\,kV$