Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 11 vom 21. Dezember 2009

Teil A

Aufgabe A38 Sei $I := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ und $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegeben durch

$$f_n : I \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{1}{n}\cos(x^n)e^{-n(x+1)} \quad , n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ im Intervall I

(a) konvergiert.

(b) eine stetig differenzierbare Funktion f darstellt mit $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$. Berechnen Sie insbesondere $f'(0)$.

Aufgabe A39 Sei F die 2π-periodische Fortsetzung einer Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für die Fourier-Koeffizienten $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von F bzgl. des Orthonormalsystems $\{\cos(n\cdot) : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\sin(n\cdot) : n \in \mathbb{N}\}$ gilt:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} F(x)\cos(nx)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} F(x)\sin(nx)dx.$$

Aufgabe A40 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, definiert durch $f(x) := x^2$ für $-\pi \leq x < \pi$. Bestimmen Sie die Fourierreihe von f und zeigen Sie damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Aufgabe A41 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, welche durch $f(x) := \cos(\mu x)$, $x \in [-\pi, \pi)$ und $\mu \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ definiert ist. Bestimmen Sie die Fourierreihe von f und leiten Sie daraus die Partialbruchzerlegung des Cotangens her:

$$\cot(\pi x) = \frac{1}{\pi x} - \frac{2x}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}\right), \; x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$$

Aufgabe A42 Sei $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie die Parsevalsche Identität

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right),$$

wobei a_n und b_n die Fourierkoeffizienten von f sind.

Teil B

Aufgabe B39 Sei $I := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ und $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegeben durch

$$f_n : I \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n^3(1 + x^n)}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ im Intervall I

(a) konvergiert.

(b) eine stetig differenzierbare Funktion f darstellt mit $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$. Berechnen Sie insbesondere $f'(0)$.

Aufgabe B40 Bestimmen Sie die Fourierreihen der folgenden 2π-periodischen Funktionen:

(a) $f(x) := |x|$ für $-\pi \le x < \pi$,

(b) $g(x) := \begin{cases} -\cos(x) & \text{für } -\pi \le x < 0, \\ \cos(x) & \text{für } 0 \le x < \pi \end{cases}$,

(c) $h(x) := \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x < \pi, \\ 0 & \text{für } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$.

Aufgabe B41 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = |\sin(x)|$. Bestimmen Sie die Fourierreihe von f.

AM3 KGÜ 11

B39.1

(1.7.) Satz

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen $f_n: I \to \mathbb{R}$
mit $|f_n(x)| \leq M \; \forall x \in I$, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$
$\Rightarrow$ Funktionenreihen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ glm. konv.

geg.: $I := [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $f_n: I \to \mathbb{R}$
$f_n(x) = \frac{x^n}{n^3(1+x^n)}$, $n \in \mathbb{N}$

ges.: a.) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konv. in I.

Benutze Satz 1.7.

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^3|1+x^n|} \overset{x\in I}{\leq} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^3|1+x^n|} \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^3(\cancel{|1|}1-|x|^n)}$$

$$\leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^3\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\cancel{2^n}} \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{2^n-1} = \frac{1}{n^3\underbrace{(2^n-1)}_{\geq 1 \; \forall n \in \mathbb{N}}} \leq \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, ist nach Satz (1.7.) die Reihe
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (glm.) konv.

b.) ges.: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stellt in I eine stetig diff'bare
Fkt. mit $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ dar.
Berechne $f'(0)$.

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

Satz (1.6.)b.) Voraussetzung: f_n auf I stetig diff'bar $\Leftarrow$
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert, $\Leftarrow$ a)
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konvergiert glm. auf I $\Leftarrow$ (1.7.)
$\Rightarrow f$ stetig diff'bar auf I und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in I.$$

b.) $f_n(x)$ stetig diff'bar in I $\forall n \in \mathbb{N}$ und nach a.) konv. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

noch zu zeigen: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konv. glm. auf I.

$$f_n'(x) = \frac{n \cdot x^{n-1} n^3 (1+x^n) - x^n n^3 n x^{n-1}}{(n^3(1+x^n))^2}$$

$$= \frac{x^{n-1}}{n^2(1+x^n)} - \frac{x^{2n-1}}{n^2(1+x^n)^2}$$

$$(1.7.): \left| f_n'(x) \right| \leq \frac{|x|^{n-1}}{n^2(1+x^n)} + \frac{|x|^{2n-1}}{n^2(1+x^n)^2} \overset{(*)}{\leq} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2^n}{2^n-1}$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} \frac{1}{n^2} \frac{2^{2n}}{(2^n-1)^2} = \frac{2}{n^2}\left[\frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{(2^n-1)^2}\right] \leq \frac{2}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < \infty$, nach (1.7.) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ glm. konv.

Nach (1.6.) b.) ist dann $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \; \underline{\underline{= 0}}$$

II (10) zu Fourier-Reihen: f 2π-periodisch,

* $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$
* $f(x) = f(-x)$: f gerade
  $\Rightarrow f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx)$
* $f(x) = -f(-x)$: f ungerade
  $\Rightarrow f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)$
* $a_0 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $b_n := \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x) \sin(nx)\,dx$
* $a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,dx$

Integrationsgrenzen sind nur Beispiele!

HM3 KGÜ11

B40.) a.) $f(x) := |x|$ für $-\pi \le x < \pi$

$f(x) = |x|$ ist gerade Fkt., da $f(x) = |x| = f(-x)$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\,dx + \int_0^{\pi} x\,dx\right] = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\cos(nx)\,dx + \int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \overset{P.I.}{=} \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cdot\sin(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cdot\cos(nx)$$

$$\overset{n=2k-1}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)$$

b.)

$$g(x) := \begin{cases} -\cos(x), & -\pi \le x < 0 \\ \cos(x), & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

g ist ungerade, denn es ist $g(x) = -g(-x)$

$\underline{n \ge 1}$

nachtr. Notiz von (2*)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\cos(x)\sin(nx)\,dx$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)\,dx}_{(*)}$$

$$(*) \overset{P.I.}{=} \sin(nx)\sin(x)\Big|_0^{\pi} - n\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)\,dx$$

$$\overset{P.I.}{=} -n\left[-\cos(x)\cos(nx)\Big|_0^{\pi} - n\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)\,dx\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= n^2\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)\,dx - n((-1)^n+1)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)\,dx = \frac{-n((-1)^n+1)}{1-n^2} \qquad (2*)$$

$\underline{n=1}$: $b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(x)\,dx \underline{\underline{= 0}}$

$$g(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n((-1)^n+1)}{\pi\,(n^2-1)}\cdot\sin(nx)$$

$$\overset{n=2k}{=} \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\cdot 2k}{(4n^2-1)\pi}\cdot\sin(nx)}}$$

$\underline{c.)}$ $h(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \pi \\ 0, & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$ weder gerade, noch ungerade.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx = \frac{1}{n^2\pi}((-1)^n-1) \qquad (\text{Teil } \underline{a.})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx \overset{P.I.}{=} \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}(-1)^n + 0\right]$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

$$h(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[((-1)^n-1)\frac{\cos(nx)}{n^2\pi} + (-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}\right]$$

HM3 KGü 11

12. JAN. 2010

B41.1) $f(x) = |\sin(x)|$ $\quad$ f ist gerade.

f ist π-periodisch

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\cos(x)\Big|_0^{\pi} + \cos(x)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = \underline{\underline{\frac{4}{\pi}}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)\,dx$$

$\underline{n>1}$: $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)\,dx \overset{\text{P.I.}}{=} -\cos(x)\cos(nx)\Big|_0^{\pi} - n\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)\,dx$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} (-1)^n + 1 - n\left[\sin(x)\sin(nx)\Big|_0^{\pi} - n\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)\,dx\right]$$

$$= (-1)^n + 1 + n^2\int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi}\sin(x)\cos(nx)\,dx = \frac{(-1)^n+1}{1-n^2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n+1}{1-n^2} \quad (n>1)$$

$$a_1 = 0$$

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n+1}{1-n^2}\cos(nx)$$

$$\overset{n=2k}{=} \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4k^2)}\cos(2kx)$$