$$\cancel{= -4704 + 4224 - 2592} \qquad \cancel{= -1152}$$

1. Übung – Teil A

Aufgabe A1:

(i)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \quad \cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7/2 & 5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot\tfrac{1}{7}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7/2 & 5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/7 & -11/7 & 1/7 & 1 \end{array}\right) \quad \cdot\tfrac{1}{2} \quad \cdot\left(-\tfrac{2}{7}\right) \quad \cdot\left(-\tfrac{7}{8}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5/7 & 1/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 & -1/8 & -7/8 \end{array}\right) \quad \cdot 5/7 \quad \cdot 1/2$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 19/16 & -1/16 & -7/16 \\ 0 & 1 & 0 & 9/8 & -3/8 & -5/8 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 & -1/8 & -7/8 \end{array}\right) \quad \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/8 & 1/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 9/8 & -3/8 & -5/8 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 & -1/8 & -7/8 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5/8 & 1/8 & -1/8 \\ 9/8 & -3/8 & -5/8 \\ 11/8 & -1/8 & -7/8 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

(ii) Satz $\underline{\text{IV}}$.(4.8):

Sei $A = (a_{ij})$ eine invertierbare (n,n)-Matrix.

Dann gilt $A^{-1} = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit

$$c_{ij} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A'_{ji}) = \frac{1}{\det(A)} \cdot a^{\#}_{ij}.$$

A'_{ji} entsteht aus A durch Streichen der j-ten Zeile und i-ten Spalte.

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= 2\cdot(-3)\cdot(-3) + 1\cdot 2\cdot 3 + (-1)\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot(-3) - (-1)\cdot(-3)\cdot 3$$

$$= 8$$

$$\left(\det(A'_{ij})\right)_{i,j=1,\dots,3} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -9 & 11 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \left(\det(A'_{ji})\right)_{i,j=1,\dots,3} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -9 & -3 & 5 \\ 11 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left((-1)^{i+j}\cdot \det(A'_{ji})\right)_{i,j=1,\dots,3} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 9 & -3 & -5 \\ 11 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 9 & -3 & -5 \\ 11 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe A2:

1. Schritt: Bestimme die Eigenwerte von A, d.h. die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A

$$p_A(\lambda) := \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) + 0 + 0 \\
&\quad - (-1-\lambda)\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot(-1)\cdot(5-\lambda) - 0 \\
&= -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5) + (\lambda+1) + (\lambda-5) \\
&= -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5) + 2(\lambda-2) \\
&= (\lambda-2)\left(-(\lambda+1)(\lambda-5) + 2\right) \\
&= (\lambda-2)\left(-\lambda^2 + 4\lambda + 7\right)
\end{aligned}$$

Also gilt

$$p_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 2 \;\vee\; \lambda^2 - 4\lambda - 7 = 0$$

Das liefert die drei Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2+\sqrt{11}, \quad \lambda_3 = 2-\sqrt{11}.$$

2. Schritt: Berechne Eigenvektoren

Zu $\lambda_1 = 2$: $(A-2I)\cdot \underline{x} = \underline{0}$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad |\cdot(-3)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \cdot(-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ein Parameter kann frei gewählt werden: $x_1 = t$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t \end{array}\right) \quad \cdot 1 \quad \cdot 3$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 3t \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 & t \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & -3t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

Eigenraum: $$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;;\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Zu $\lambda_2 = 2+\sqrt{11}$: $\quad (A-(2+\sqrt{11})I)\cdot \underline{x} = \underline{0}$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3-\sqrt{11} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{11} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3-\sqrt{11} & 0 \end{array}\right) \cdot(-3-\sqrt{11}) \uparrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 10+3\sqrt{11} & -3-\sqrt{11} & 0 \\ -1 & -\sqrt{11} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3-\sqrt{11} & 0 \end{array}\right) \qquad \text{NR: } (10+3\sqrt{11})(3-\sqrt{11}) = -3-\sqrt{11}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -\sqrt{11} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3-\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ein Parameter kann frei gewählt werden: $x_2 = t$.

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -\sqrt{11} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 3-\sqrt{11} & 0 \end{array}\right) \quad |\cdot\sqrt{11} \uparrow \quad \cdot(-1) \downarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & \sqrt{11}\,t \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 3-\sqrt{11} & -t \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \\ |:(3-\sqrt{11}) \end{array} \qquad \frac{1}{\sqrt{11}-3} = \frac{\sqrt{11}+3}{11-9} = \frac{1}{2}(3+\sqrt{11})$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -\sqrt{11}\,t \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(3+\sqrt{11})t \end{array}\right) \uparrow \cdot 1$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(3-\sqrt{11})t \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(3+\sqrt{11})t \end{array}\right)$$

Eigenraum: $E(2+\sqrt{11}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3-\sqrt{11}) \\ 1 \\ \frac{1}{2}(3+\sqrt{11}) \end{pmatrix}, t\in\mathbb{R} \right\}$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3-\sqrt{11} \\ 2 \\ 3+\sqrt{11} \end{pmatrix} \right\}.$$

Analog zeigt man

$$E(2-\sqrt{11}) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3+\sqrt{11} \\ 2 \\ 3-\sqrt{11} \end{pmatrix} \right\}.$$

Da A drei paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt, sind die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3-\sqrt{11} \\ 2 \\ 3+\sqrt{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+\sqrt{11} \\ 2 \\ 3-\sqrt{11} \end{pmatrix}$ linear unabhängig (Satz IV.5.5)

Aus Satz IV.5.6 folgt

$$B^{-1}AB = \operatorname{diag}(2,\ 2+\sqrt{11},\ 2-\sqrt{11})$$

für

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 3-\sqrt{11} & 3+\sqrt{11} \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 3+\sqrt{11} & 3-\sqrt{11} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe A3:

$$-17x^2 + 18xy + 7y^2 + 16x - 32y + 28 = 0,$$

d.h. $(A\underline{x})\cdot\underline{x} + \underline{b}\cdot\underline{x} + c = 0$ (Kegelschnitt)

mit $A = \begin{pmatrix} -17 & 9 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ -32 \end{pmatrix}$, $c = 28$, da

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

1. Schritt: Orthonormalbasis von Eigenvektoren bestimmen

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -17-\lambda & 9 \\ 9 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (-17-\lambda)(7-\lambda) - 81$$

$$= \lambda^2 + 10\lambda - 200 = (\lambda+20)(\lambda-10)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = -20$ (mit algebraischer Vielfachheit 1)

Bestimmung von Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 10: \quad \left(\begin{array}{cc|c} -27 & 9 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 3t \end{array}\right).$$

$\Rightarrow E(10) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\}.$

$\Rightarrow \underline{x_1} := \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ ist ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 10$.

Nach Satz IV.6.5 (ii) müssen die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -20$ orthogonal auf $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ stehen; sie haben dieselbe Richtung wie $\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \underline{x_2} := \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ ist ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert λ_2.

$\Rightarrow (\underline{x_1}, \underline{x_2})$ ist eine ON-Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A.

2. Schritt: Durchführen der Hauptachsentransformation

Setze $S := (\underline{x_1}, \underline{x_2}) = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 1\end{pmatrix}$.

Nach Satz IV.6.3 ist S orthogonal, d.h. $S^T = S^{-1}$.

$$\Rightarrow S^T \cdot A \cdot S = S^{-1} \cdot A \cdot S \underset{\text{Satz IV. 5.6}}{=} \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 0\\0 & -20\end{pmatrix}$$

Setze $\underline{y} := \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} := S^{-1}\underline{x} = S^T\underline{x}$ mit $\underline{x} := \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \underline{x} = S\underline{y}$, also $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$

$$\left\| \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{10}}(\xi - 3\eta) \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\xi + \eta) \end{array} \right. \qquad (*)$$

Weiter gilt

$$A\underline{x} \cdot \underline{x} = (AS\underline{y}) \cdot (S\underline{y}) = S^TAS\underline{y} \cdot \underline{y}$$

$$= \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2.$$

Somit überführt $(*)$ die Gleichung

$$(A\underline{x}) \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot \underline{x} + c = 0$$

in $10\xi^2 - 20\eta^2 + \frac{16}{\sqrt{10}}(\xi - 3\eta) - \frac{32}{\sqrt{10}}(3\xi + \eta) + 28 = 0$.

Mit quadratischer Ergänzung erhält man

$$10\xi^2 - 20\eta^2 - \frac{80}{\sqrt{10}}\xi - \frac{80}{\sqrt{10}}\eta + 28$$

$$= 10\left(\xi^2 - \frac{8}{\sqrt{10}}\xi + \left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right)^2\right) - 20\left(\eta^2 + \frac{4}{\sqrt{10}}\eta + \left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2\right)$$

$+ 28 - 16 + 8$, also

$$-\frac{1}{2}\left(\xi - \frac{4}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\eta + \frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1 \qquad (**)$$

Die Eigenvektoren $\underline{x_1}$, $\underline{x_2}$ ergeben die Richtungen des (ξ, η)-Koordinatensystems.

Denn z.B. $\xi = 0$, d.h. die η-Achse, ergibt $\underline{x} = S\underline{y} = (\underline{x_1}, \underline{x_2})\begin{pmatrix}0\\\eta\end{pmatrix} = \eta\underline{x_2}$, $\eta \in \mathbb{R}$.

3. Schritt: Verschiebung des Mittelpunkts

Setze $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi - \xi_0 \\ \eta - \eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi - \frac{4}{\sqrt{10}} \\ \eta + \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ mit $\xi_0 = \frac{4}{\sqrt{10}}$, $\eta_0 = -\frac{2}{\sqrt{10}}$.

Das überführt (**) in

$$-\frac{u^2}{2} + v^2 = 1 \quad \text{(Normalform der Hyperbel)} \quad (***)$$

Allgemein:

$$-\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{Hyperbel-NF}$$

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \quad \text{Ellipsen-NF}$$

$$v = au^2 \text{ bzw. } u = av^2, \; a \neq 0 \quad \text{Parabel-NF}$$

Mittelpunkt (bei Parabel: Scheitelpunkt)

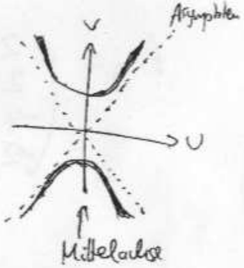
$(u,v) = (0,0) \rightsquigarrow \xi = \xi_0, \; \eta = \eta_0$

$$\rightsquigarrow \underline{x} = S\underline{y} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2)\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \xi_0 \underline{x}_1 + \eta_0 \underline{x}_2 =: \underline{m}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{10}} \underline{x}_1 - \frac{2}{\sqrt{10}} \underline{x}_2 = \frac{4}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{2}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In (***) ist $u = 0$ möglich ($\Leftrightarrow v = \pm 1$), aber $v = 0$ unmöglich.

$\Longrightarrow$ Hyperbel hat v-Achse als Mittelachse.

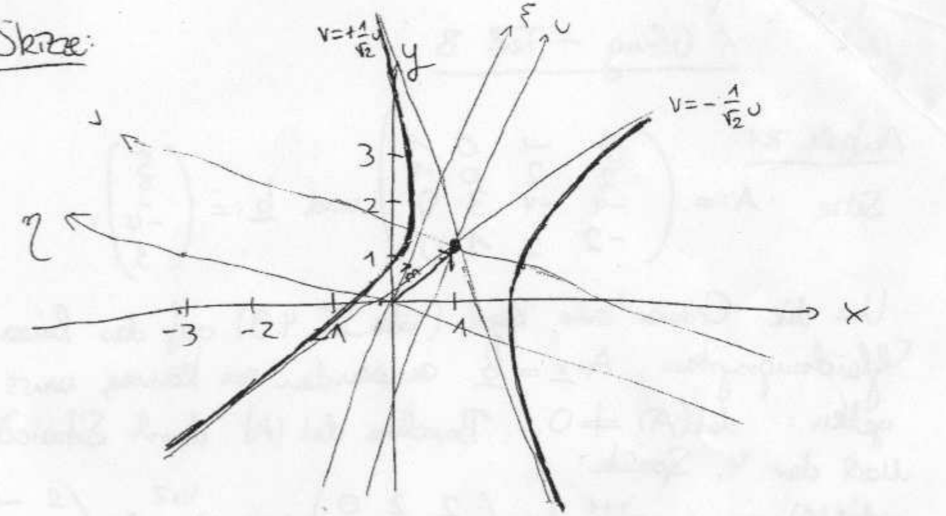


4. Schritt: Asymptoten und Skizze

Asymptoten: $\frac{v^2}{u^2} = \underbrace{\frac{1}{u^2}}_{\to 0 \text{ für } u \to \pm\infty} + \frac{1}{2}$, also $\frac{v^2}{u^2} - \frac{1}{2} \to 0$

$$\rightsquigarrow v = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} u \quad \text{Asymptoten für } u \to \pm\infty.$$

Skizze:



<u>1. Übung – Teil B</u>

<u>Aufgabe B1:</u>

Setze $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} := \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Um die Cramer'sche Regel (Satz IV. 4.9) auf das lineare Gleichungssystem $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ anwenden zu können, muss gelten: $\det(A) \neq 0$. Berechne $\det(A)$ durch Entwickeln nach der 4. Spalte:

$$\det(A) = (-1)^{4+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\left[2 \cdot (-4) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) \cdot 1\right]$$
$$+ \left[2 \cdot (-4) \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \cdot 2 - (-1) \cdot (-4) \cdot 1\right]$$
$$= -[-8-12-12+8] + [-8+6-12-4]$$

$24 + (-18) = 6 \neq 0$ ($\Rightarrow$ Cramer'sche Regel ist anwendbar).

Die Cramer'sche Regel besagt: $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ist eindeutig lösbar mit $\boxed{x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}}$, wobei A_i diejenige Matrix ist, die aus A entsteht, indem man die i-te Spalte durch $\underline{b}$ ersetzt.

Berechne also $\det(A_i)$, $i = 1, \dots, 4$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = -\det \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -(\overbrace{-3(18-6)}^{-36} + (-36+8)) = -22\,18$$
$$+(-3(10+3) + (-20-4)) = -35-24$$
$$= -(-64) + (-63) = 64-63$$
$$= 1$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A_2) = -\det \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(*)}{=} -(\overset{-44}{\cancel{+64}}) + (\underbrace{-3(6+10)}_{-48} + \underbrace{(-8+20)}_{+12})$$
$$= +\cancel{6}4 \; \cancel{+24} -36$$
$$= \cancel{-40} \; 8 \qquad =: B \text{ (für } \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\text{)}$$

Zu (*): aus Rechnung für $\det(A_1)$: $\det \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=:B} = +\cancel{6}4$.
Die Matrix $B' := \begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ geht durch Spaltentausch aus B hervor. Also $\det(B') = -\det(B)$.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 9 & 1 \\ -4 & -4 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A_3) = -\underbrace{\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ -4 & -4 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{} + \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & -4 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

~~= 0, da 1.+2. Spalte linear abhängig~~

$$\cancel{= 2 \cdot (-12+8) + 4 \cdot (-3-10) + 2 \cdot (4+20)}$$
$$\cancel{= -12}$$
$$= -112 + (-108)$$
$$= -220$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = -\det\begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -(-3(18-6) + (-36+8))$$
$$+ (-3(10+3) + (-20-4))$$
$$= -(-64) + (-63)$$
$$= 1$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_2) = -\det\begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -(-3(6+18) + (-8+36))$$
$$+ (-3(6+10) + (-8+20))$$
$$= 44 - 36$$
$$= 8$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 9 & 1 \\ -4 & -4 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_3) = -\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 9 \\ -4 & -4 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & -4 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\cdot(-1)$

$$= -\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ -4 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & -4 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 4(-8+36) + 2(-12+8)$$
$$+ 4(-3-10) - 2(4+20)$$
$$= 4$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 9 \\ -4 & -4 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \det(A_4) = 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$= 3 \cdot \left[2 \cdot (6-18) - 2 \cdot (-3-10) - 2 \cdot (-9-10)\right]$$

$$- \left[2 \cdot (-8+36) - 2 \cdot (4+20) - 4 \cdot (-9-10)\right]$$

$$= 36$$

Also $\quad x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = \dfrac{1}{6}$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$x_3 = \frac{\det \cdot (A_3)}{\det(A)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x_4 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = \frac{36}{6} = 6$$

Die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS) ist also

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 4/3 \\ 2/3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 9 \\ -4 & -4 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_4) = +3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \cdot \left[\cancel{2\cdot(6-18) - 2\cdot(-3-10) \pm 2(-9-10)}\right] 40$$

$$- \left[2\cdot(-8+36) - 2(4+20) - 4(-9-10)\right]$$

$$= \cancel{-192}.\ 36$$

Also $x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{1}{6}$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \cancel{-\frac{40}{6}} = \cancel{-\frac{20}{3}}\quad \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \cancel{-\frac{12}{6} = -2}\quad -\frac{220}{6} = -\frac{110}{3}$$

$$x_4 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = \cancel{-\frac{192}{6} = -32}\quad \frac{36}{6} = 6$$

Die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems (LGS) ist also

$$\underline{x} = \cancel{\begin{pmatrix} 1/6 \\ -20/3 \\ -2 \\ -32 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1/6 \\ 4/3 \\ -110/3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

<u>Aufgabe B2:</u> <u>1. Schritt</u>: Bestimme die Eigenwerte

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda)$.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\left[(4-\lambda)(3-\lambda) - 2\right] - 2\left[\cancel{1}(3-\lambda) - 1\right] + \left[2 - 4 + \lambda\right]$$

$$= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24. \checkmark$$

Die ganzzahligen Nullstellen müssen Teiler des Absolutglieds sein. Durch Ausprobieren findet man, dass 2 eine Nullstelle von p_A ist.

$$(-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 28\lambda + 24) : (\lambda - 2) = -\lambda^2 + 8\lambda - 12$$

$$\begin{array}{l}
-(-\lambda^3 + 2\lambda^2) \\
\hline
\quad 8\lambda^2 - 28\lambda + 24 \\
\quad -(8\lambda^2 - 16\lambda) \\
\hline
\qquad -12\lambda + 24 \\
\qquad -(-12\lambda + 24) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$\Longrightarrow p_A(\lambda) = (\lambda - 2)\cdot(-\lambda^2 + 8\lambda - 12)$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-6)$$

$$= -(\lambda-2)^2(\lambda-6).$$

Die Nullstellen sind also 2, 2, 6. Die Matrix A hat also folgende Eigenwerte:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 6.$$

2 Schritt: Berechne Eigenvektoren

Zu λ_1 und λ_2: $A\underline{x} = 2\underline{x} \iff (A-2E)\cdot\underline{x} = \underline{0}$

LGS: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Zwei Parameter frei wählbar.

Setze $x_2 = s$, $x_3 = t$. Das führt auf $x_1 = -s-t$. Also ist

$$E(2) = \left\{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 ;\ \underline{v} = s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wähle $\underline{v} := \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$

$\underline{w} := \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.

Zu λ_3: $A\underline{x} = 6\underline{x} \iff (A-6E)\cdot\underline{x} = \underline{0}$

LGS: $\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$ $\cdot(-2)$ $\cdot 3$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$ $\cdot 1$ $\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right)$

Ein Parameter frei wählbar. Setze $x_3 = s$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{array}\right)$ $\cdot 8$ $\cdot 3$ $\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3s \\ 0 & 4 & 0 & 8s \\ 0 & 0 & 1 & s \end{array}\right) \cdot \frac{1}{4}$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3s \\ 0 & 1 & 0 & 2s \\ 0 & 0 & 1 & s \end{array}\right)$ $\cdot(-1)$ $\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 & 2s \\ 0 & 0 & 1 & s \end{array}\right)$

$$E(6) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 ;\ \underline{x} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R} \right\}$$

Wähle $\underline{x} := \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 6$.

3. Schritt: Finde Transformationsmatrix B, so dass $B^{-1}AB$ Diagonalgestalt besitzt

Nach Satz IV.5.6 gilt: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sind die zugehörigen Eigenvektoren $x_1, \dots, x_n$ linear unabhängig, dann gilt $B^{-1}AB = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ mit $B := (x_1, \dots, x_n)$.

Zeige also, dass die Eigenvektoren $\underline{v}, \underline{w}, \underline{x}$ linear unabhängig sind.

Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha\cdot\underline{v} + \beta\cdot\underline{w} + \gamma\cdot\underline{x} = \underline{0}$.

$$\iff \alpha\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \beta = -\gamma$ (3. Komponente)
und $\alpha = -2\gamma$ (2. Komponente)
und damit $2\gamma + \gamma + \gamma = 0$ (1. Komponente)

$2\gamma\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+1+1\\2-0+2\\0-1+1\end{pmatrix}\gamma = 0$

$\Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

Also sind $\underline{v}, \underline{w}, \underline{x}$ linear unabhängig.

Damit ist $B = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\1 & 0 & 2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ eine Transformationsmatrix mit $B^{-1}\cdot A\cdot B = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{[B ist nicht eindeutig bestimmt.]}}$ → Eigenvektoren sind frei wählbar!

Aufgabe B3:

$$7x^2+8xy+13y^2-34x+2y-8=0,$$

d.h. $(A\underline{x})\cdot\underline{x}+\underline{b}\cdot\underline{x}+c=0$

mit $A=\begin{pmatrix}7&4\\4&13\end{pmatrix}$, $\underline{b}=\begin{pmatrix}-34\\2\end{pmatrix}$, $c=-8$.

1. Schritt: Orthonormalbasis von Eigenvektoren bestimmen

$$p_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}7-\lambda&4\\4&13-\lambda\end{pmatrix}=(7-\lambda)(13-\lambda)-16$$

$$=\lambda^2-20\lambda+75=(\lambda-5)(\lambda-15)$$

$\Rightarrow \lambda_1=15,\ \lambda_2=5$ (mit algebraischer Vielfachheit 1)

Bestimmung von Eigenvektoren:

$\lambda_1=15$: $\left(\begin{array}{cc|c}-8&4&0\\4&-2&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cc|c}-2&1&0\\0&0&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cc|c}-2&1&0\\1&0&t\end{array}\right)$

$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&0&t\\0&1&2t\end{array}\right)$.

$\Rightarrow E(15)=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

$\Rightarrow \underline{x_1}:=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ist ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1=15$.

Nach Satz IV.6.5 (ii) müssen die Eigenvektoren zu $\lambda_2=5$ orthogonal auf $\binom{1}{2}$ stehen; sie haben dieselbe Richtung wie $\binom{-2}{1}$.

$\Rightarrow \underline{x_2}:=\frac{1}{\sqrt5}\binom{-2}{1}$ ist ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert λ_2.

$\Rightarrow (\underline{x_1},\underline{x_2})$ ist eine ON-Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A.

2. Schritt: Durchführen der Hauptachsentransformation

Setze $S:=(\underline{x_1},\underline{x_2})=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}$.

Nach Satz IV.6.3 ist S orthogonal, d.h. $S^T=S^{-1}$.

$\Rightarrow S^T\cdot A\cdot S=S^{-1}\cdot A\cdot S\underset{\text{Satz IV.5.6}}{=}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&0\\0&5\end{pmatrix}$.

Setze $\underline{y}:=\binom{\xi}{\eta}:=S^{-1}\underline{x}=S^T\underline{x}$ mit $\underline{x}:=\binom{x}{y}$.

$\Rightarrow \underline{x}=S\underline{y}$, also $\binom{x}{y}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\binom{\xi}{\eta}$.

$$\left\| \begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt5}(\xi-2\eta)\\ y=\frac{1}{\sqrt5}(2\xi+\eta)\end{array}\right. \qquad (*)$$

$(AS\underline{y})\cdot(S\underline{y})=y^TS^TA^TSy$

$=y(S^TA^TSy)$, $A^T=A$

Weiter gilt

$$A\underline{x}\cdot\underline{x}=(AS\underline{y})\cdot(S\underline{y})\overset{\downarrow}{=}S^TAS\underline{y}\cdot\underline{y} \qquad \text{da } \underline{x}\cdot\underline{y}=x^Ty$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\binom{\xi}{\eta}\cdot\binom{\xi}{\eta}=\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2.$$

Somit überführt (*) die Gleichung $(A\underline{x})\cdot\underline{x}+\underline{b}\cdot\underline{x}+c=0$ in

$$15\xi^2+5\eta^2-\frac{34}{\sqrt5}(\xi-2\eta)+\frac{2}{\sqrt5}(2\xi+\eta)-8=0.$$

Mit quadratischer Ergänzung erhält man

$$15\xi^2+5\eta^2-6\sqrt5\,\xi+14\sqrt5\,\eta-8$$

$$=15\left(\xi^2-2\xi\cdot\frac{3\sqrt5}{15}+\left(\frac{3\sqrt5}{15}\right)^2\right)+5\left(\eta^2+\frac{14}{\sqrt5}\eta+\left(\frac{7}{\sqrt5}\right)^2\right)$$

$$\underbrace{-8-15\cdot\left(\frac{3\sqrt5}{15}\right)^2-5\cdot\left(\frac{7}{\sqrt5}\right)^2}_{-8-3-49=-60},\quad\text{also}$$

$$15\left(\xi-\frac{1}{\sqrt5}\right)^2+5\left(\eta+\frac{7}{\sqrt5}\right)^2=60,\ \text{d.h.}$$

$$\frac{1}{4}\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\eta + \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1. \qquad (**)$$

Die Eigenvektoren $\underset{\binom{1}{2}}{\underline{x}_1}, \underset{\binom{-2}{1}}{\underline{x}_2}$ ergeben die Richtungen des (ξ, η)-Koordinatensystems.

<u>3. Schritt:</u> Verschiebung des Nullpunkts

Setze $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi - \xi_0 \\ \eta - \eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \eta + \frac{7}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ mit $\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \ \eta_0 = -\frac{7}{\sqrt{5}}$.

Das überführt $(**)$ in

$$\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{12}v^2 = 1 \quad \text{(Normalform der Ellipse)}$$

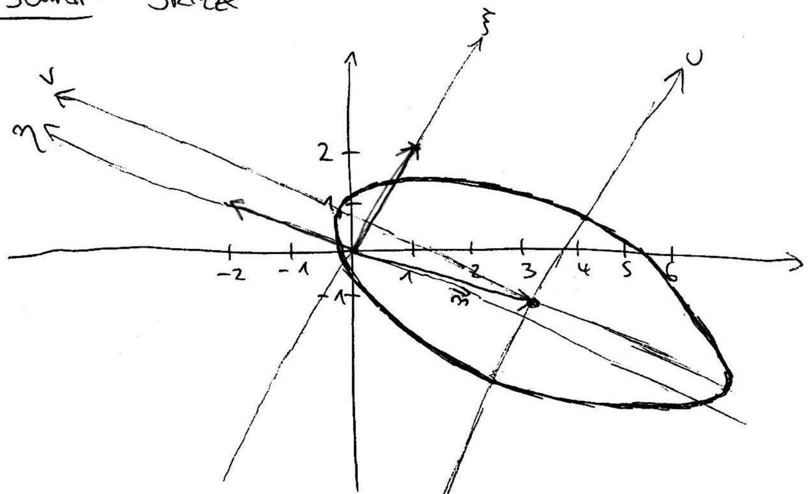
<u>Mittelpunkt</u>

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \ \underline{x} = S\underline{y} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2)\begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = \xi_0 \underline{x}_1 + \eta_0 \underline{x}_2 =: \underline{m}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\underline{x}_1 - \frac{7}{\sqrt{5}}\underline{x}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{7}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

<u>4. Schritt:</u> Skizze



Halbachsen:
in u-Richtung: $\sqrt{4} = 2$
in v-Richtung: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

<u>Aufgabe B4:</u> 1. falsch 2. wahr 3. wahr 4. falsch 5. falsch