Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 10 vom 15. Dezember 2009

Teil A

Aufgabe A34 Berechnen Sie

$$I = \int_{\partial G} \left(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2\right)^{\frac{1}{2}} \, d\omega \text{ mit}$$

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax^2 + by^2 + cz^2 < 1\right\}, \, a, b, c > 0 \, .$$

Aufgabe A35 Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Stokes das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma \left(2y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y - z^2\mathrm{d}z\right) \text{ mit } \gamma(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0), \; 0 \le t \le 2\pi,$$

wobei Γ die Randkurve des Flächenstücks $\mathcal{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 9, z > 0\right\}$ ist.

Aufgabe A36 Unter einer im Gebiet $G \in \mathbb{R}^2$ exakten Differentialgleichung versteht man eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung $a(x, u(x)) + b(x, u(x))\, u'(x) = 0$ für welche es eine *Stammfunktion* $h : G \to \mathbb{R}^2$ gibt, sodass gilt:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = a(x, y), \; \frac{\partial h}{\partial y} = b(x, y) \; \forall (x, y) \in G.$$

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$a(x, u(x)) + b(x, u(x))\, u'(x) = 0$$

mit $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a(x, y) := \sinh(x^2+y)+2x^2\cosh(x^2+y)$ und $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $b(x, y) := x\cosh(x^2 + y)$, wobei $(x, y) \in G := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0\right\}$.

a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung in G exakt ist, und bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit.

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung u, welche $u(1) = -1$ erfüllt.

Aufgabe A37 Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, gegeben durch

$$f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} \quad , n \in \mathbb{N},$$

auf $[0,\infty)$ gleichmäßig konvergiert. Gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \ ?$$

Teil B

Aufgabe B35 Sei N der in das Äußere der von der Fläche $\mathcal{F}$ berandeten Körpers weisende Normalenvektor. Berechnen Sie das Integral $\int_{\mathcal{F}} v \cdot N d\omega$ mit $v = \left(z^2 - x, -xy, 3z\right)$ und $\mathcal{F}$ die Oberfläche des Körpers, der durch die Flächen $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$ und $z = 0$ begrenzt wird.

Aufgabe B36 Es sei

$$\mathcal{F} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 < z < 1 \right\} \text{ mit } a, b > 0$$

und $v(x,y,z) = \left(x \sin z, -x^2 y, y \cos z\right)$. Berechnen Sie $\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot}(v) \cdot N d\omega$, wobei N der ins Äußere des Zylinders weisende Normalenvektor sei.

Aufgabe B37 Beantworten Sie folgende Fragen:

(a) Was ist eine reguläre Kurve?

(b) Was ist ein reguläres Flächenstück? Was ist eine reguläre Fläche?

(c) Was besagt der Satz von Gauß? Was sind seine Voraussetzungen?

(d) Was besagt (inkl. Voraussetzungen) der Satz von Stokes?

Aufgabe B38 Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, gegeben durch

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{2n^2 x}{(n^2 + x^2)^2} \quad , n \in \mathbb{N},$$

auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert. Gilt $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$?

AM3KGÜ 10

22. DEZ. 2009

B35.) Sei N der in das Äußere des von der Fläche F berandeten Körpers weisende Normalenvektor.

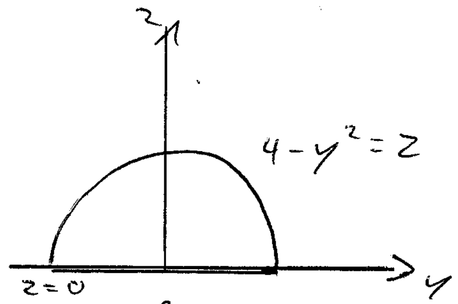
Berechne $\int_F vN\,d\omega$, $v=(z^2-x,-xy,3z)$,

F Oberfläche des Körpers, der durch Flächen $z=4-y^2$, $x=0$, $x=3$, $z=0$ begrenzt wird.

$$\int_F \underline{f}\cdot\underline{n}\,d\omega = \int_{\partial G} div(\underline{f})\,dx\,dy\,dz$$

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} z^2-x \\ -xy \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$div(\underline{f}) = -1-x+3$$



$$\int_{y=-2}^{2}\int_{z=0}^{4-y^2}\underbrace{\int_{x=0}^{3}(2-x)dx}_{\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=6-4{,}5=1{,}5}\,dz\,dy = \int_{y=-2}^{2} 1{,}5\cdot(4-y^2)\,dy$$

$$=\left[6y-\frac{1}{2}y^3\right]_{-2}^{2}$$

Für alte Klausur wichtig: Voraussetzungen

Voraussetzungen: (für Satz von Gauß)

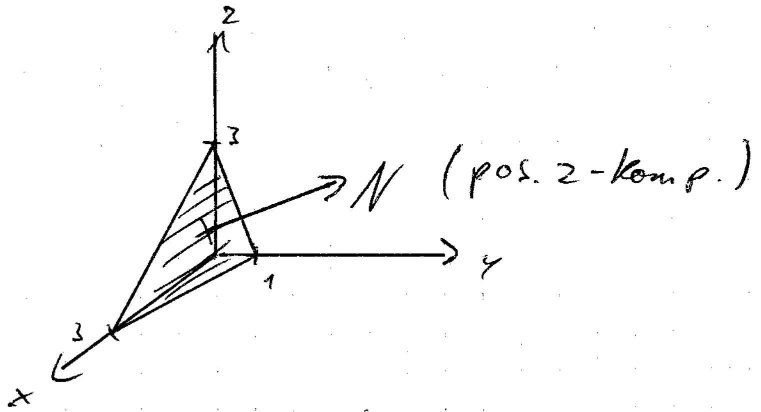
- G beschr. Gebiet
- ∂G besteht aus endlich vielen reg. Flächen
- f stetig diff'bar

Bsp.) Berechne $\int_F \operatorname{rot}(v) N \, d\omega$, F = Dreieck mit Eckpunkten $(3,0,0); (0,1,0), (0,0,3)$

$v = \frac{1}{3}(x^2 - yz, -xz - z^2, 2xy + yz)$

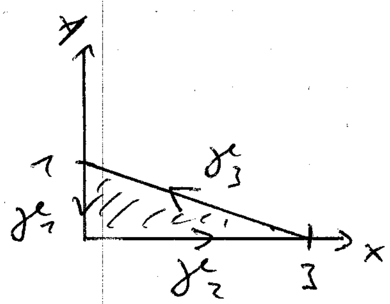
N = Flächennormale mit pos. z-Komponente

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 3y + z = 3,\ x, y, z > 0 \right\}$$



$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 3 - x - 3y,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \right\}$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x < 3,\ 0 < y < 1 - \frac{x}{3} \right\}$$



$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$

$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 3$

$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 3 - t \\ \frac{1}{3} t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 3$

$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$

$\Rightarrow$ D liegt zur Linken von γ

HM3 KGÜ 10

$$\overset{\text{Stokes}}{\Rightarrow} \int_F \mathrm{rot}(v)\cdot N \cdot d\omega = \int_{\partial F} [v_1\,dx + v_2\,dy + v_3\,dz]$$

$$J(\gamma(t)) = \partial F \quad , \quad J(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3-x-3y \end{pmatrix}$$

$$J(\gamma_1(t)) = \quad J_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 3-t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 3$$

$$\vdots \qquad J_2(t) = \begin{pmatrix} 3-t \\ 1/3\,t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 3$$

$$J_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \\ 3t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$$

$$J_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad J_2'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J_3'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_F \mathrm{rot}(v) N\, d\omega = \sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} v_1\,dx + v_2\,dy + v_3\,dz$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \begin{pmatrix} t^2 - 0 \\ -t(3-t)-(3-t)^2 \\ 0+0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt$$

$$+ \frac{1}{3}\int_0^3 \begin{pmatrix} (3-t^2)-0 \\ 0 \\ 3(3-t)\cdot\frac{1}{3}t+0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$+ \frac{1}{3}\int_0^1 \begin{pmatrix} 0-(1-t)3t \\ 0-9t^2 \\ 0+(1-t)3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} dt$$

$$\underline{\underline{= \frac{3}{2}}}$$

II 38.) S. 72 → Definition von glm. Konv. verwenden

Sei $\varepsilon > 0$, $N := \frac{1}{\varepsilon}$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{2n^2x}{(n^2+x^2)^2} - 0\right| = (*)$$

Γ $f(x) = ?$ Zeige: $f_n \xrightarrow{\text{pktw.}} f(x) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2x}{n^4+2n^2x^2+x^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x}{n^2+2x^2+\frac{x^4}{n^2}} = 0 \quad \rfloor$$

$$(*) = \frac{2n^2|x|}{n^4+2n^2x^2+x^4} = \frac{2|x|}{n^2+2x^2+\frac{x^4}{n^2}} \leq \frac{2|x|}{n^2+x^2}$$

$$\underset{2ab \leq a^2+b^2}{\leq} \frac{2|x|}{2n|x|} = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \varepsilon$$

$\forall n \geq N(\varepsilon)$ hängt nicht von x ab!

$\Rightarrow f_n \rightrightarrows 0$

gleichmäßige Konv.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{0} \frac{2n^2x}{(n^2+x^2)^2}\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{2n^2x}{(n^2+x^2)^2}\,dx\right]$$

$$\underset{t=n^2+x^2}{=} \lim_{n\to\infty} n^2 \left[\lim_{a\to\infty} \int_{n^2+a^2}^{n^2} \frac{1}{t^2}\,dt + \lim_{b\to\infty} \int_{n^2}^{n^2+b^2} \frac{1}{t^2}\,dt\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \left[\lim_{a\to\infty} -\frac{1}{t^2}\Big|_{n^2+a^2}^{n^2} + \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{t^2}\Big|_{n^2}^{n^2+b^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \left[\lim_{a\to\infty}\left[\frac{1}{n^2+a^2} - \frac{1}{n^2}\right] + \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{n^2+b^2} + \frac{1}{n^2}\right]\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{-1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dx = \underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx}}$$