**Übung zu**

**Grundgebiete der Elektrotechnik III**

WS 09/10 - Blatt 4

## Aufgabe 21

Ein Plattenkondensator mit quadratischen Platten der Kantenlänge $l$ im Abstand $d$ ist bis zur Höhe $h$ mit einem Dielektrikum der relativen Permittivität $\varepsilon_r$ gefüllt (Bild 1). Zwischen den Platten liegt die konstante Spannung $U_0$ an. Streueffekte des elektrischen Feldes sind zu vernachlässigen.

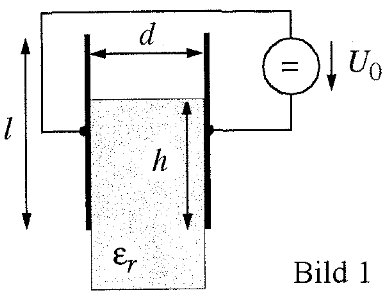


Bild 1

a) Berechnen Sie die Kapazität $C(h)$, die Energie $W_C(h)$ und die Ladung $Q(h)$ des Kondensators abhängig von der Position des Dielektrikums.

b) Das Dielektrikum wird von $h_1$ bis $h_2$ ($h_2 > h_1$) in den Kondensator geschoben. Welche Ladung $\Delta Q$ wird von der Spannungsquelle geliefert? Welche elektrische Energie $\Delta W_Q$ wird dabei von der Spannungsquelle abgegeben?

c) Welche mechanische Arbeit $W_{\text{mech}} > 0$ wird beim Verschieben aufgewendet? Stellen Sie dazu eine Energiebilanz auf.

d) Geben Sie abhängig von $h$ die auf das Dielektrikum ausgeübte Kraft an.

## Aufgabe 22

In ein ursprünglich homogenes elektrostatisches Feld $\vec{E}_0 = E_0 \cdot \vec{e}_z$ wird eine dielektrische Kugel mit dem Radius $R$ und der Permittivität $\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ eingebracht (Bild 2). Außerhalb der Kugel gilt $\varepsilon = \varepsilon_0$. Für das resultierende elektrostatische Feld der Anordnung kann der folgende Lösungsansatz gewählt werden:
$\vec{E}_i = E_i \cdot \vec{e}_z$ für $|\vec{r}| < R$ (innen) und $\vec{E}_a = \vec{E}_0 + \vec{E}_D$ für $|\vec{r}| > R$ (außen). $\vec{E}_D$ beschreibt dabei das elektrische Feld eines Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{p} = p \cdot \vec{e}_z$ (vgl. Aufgabe 14).

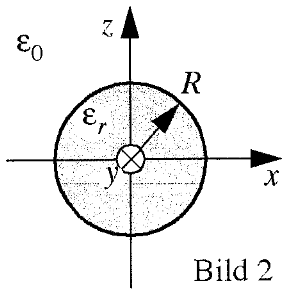


Bild 2

a) Formulieren Sie den Lösungsansatz innerhalb und außerhalb der Kugel in Kugelkoordinaten.

b) Stellen Sie mit den Grenzflächenbedingungen für die elektrische Feldstärke und die elektrische Flussdichte an der Kugeloberfläche ($r = R$) zwei Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten $E_i$ und $p$ auf.

c) Berechnen Sie die Unbekannten $E_i$ und $p$ in Abhängigkeit von den bekannten Größen $E_0$ und $\varepsilon_r$.

d) Überprüfen Sie das Ergebnis aus c) für den Spezialfall $\varepsilon_r = 1$.

e) Was ergibt sich für den Grenzfall $\varepsilon_r \to \infty$?

## Aufgabe 23

Zwischen zwei ideal leitenden, parallelen Platten mit der Fläche $A$ und dem Abstand $d$ befindet sich ein Medium mit der Leitfähigkeit $\sigma$ und der Permittivität $\varepsilon$. Die Platten werden an eine Spannungsquelle $U$ angeschlossen. Streueffekte sind zu vernachlässigen.

a) Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$, die elektrische Stromdichte $\vec{J}$ und die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ zwischen den Platten.

b) Welche Ladung $\pm Q$ tragen die Platten? Wie groß sind die Kapazität $C$ und der elektrische Widerstand $R$ der Anordnung? Geben Sie einen Zusammenhang zwischen $R$ und $C$ an.

c) Zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird die Spannungsquelle abgetrennt. Geben Sie den zeitlichen Verlauf von $Q(t)$ und $\vec{E}(t)$ an.

## Aufgabe 24

Eine unendlich lange Linienladung $q_L$ befindet sich jeweils im Abstand $a$ vor zwei rechtwinklig angeordneten, leitenden Halbebenen (Bild 3). Eine Halbebene hat das Potential $U$, die andere das Potential Null. Es gilt $\varepsilon = \varepsilon_0$.

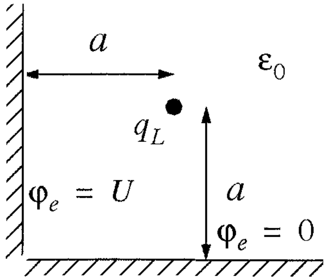



Bild 3

a) Bestimmen Sie das elektrische Feld der Linienladung zunächst für $U = 0$ mithilfe der Spiegelungsmethode.

b) Berechnen Sie das gesamte elektrische Feld durch Überlagerung des Feldes aus a) mit dem eines Winkelkondensators für $U > 0$.

## Aufgabe 25

Zwischen einem axial unendlich ausgedehnten, ideal leitenden Zylinder mit dem Radius $a$ und einer dazu parallelen, ideal leitenden, geerdeten Ebene im Abstand $b - a$ liegt die Spannung $U$ an. Der Halbraum um den Zylinder herum hat den spezifischen Widerstand $\rho$ (Bild 4).

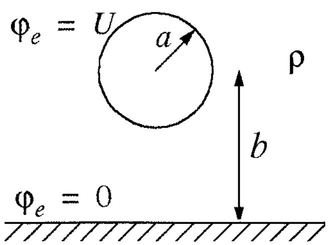



Bild 4

a) Welchem elektrostatischen Problem entspricht diese Anordnung?

b) Bestimmen Sie das elektrische Potential $\varphi_e$ und das stationäre Strömungsfeld $\vec{J}$ zwischen Zylinder und Ebene.

c) Welcher Strom pro Längeneinheit $I'$ tritt aus dem Zylinder aus?

## Aufgabe 26

Gegeben ist ein halber Zylinderkondensator mit dem Innenradius $\rho_i$, dem Außenradius $\rho_a$ und der Länge $l$ (Bild 5). Der Kondensator ist mit einem Material der Permittivität $\varepsilon$ gefüllt. Randeffekte sind zu vernachlässigen.

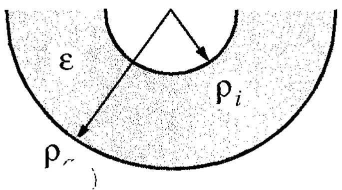



Bild 5

a) Wie groß sind die Kapazität $C$ bzw. die längenbezogene Kapazität $C'$ der Anordnung?

b) Betrachten Sie das analoge Problem des stationären Strömungsfeldes, d.h. das Füllmaterial hat die Leitfähigkeit $\sigma$. Ist hier die Angabe eines längenbezogenen Widerstandes ($R'$) oder eines längenbezogenen Leitwertes ($G'$) sinnvoll? Bestimmen Sie diese Größe.

c) Skizzieren Sie die Feldlinien und die Lage der Äquipotentialflächen des entsprechenden stationären Strömungsfeldes.

d) Welches ist die duale Struktur der Anordnung?

e) Bestimmen Sie den längenbezogenen Leitwert $G'$ dieser Anordnung.

## Aufgabe 27

Ein Elektron (Ladung $-e$, Masse $m_0$) wird zwischen zwei Metallgittern mit der Spannung $U$ beschleunigt und erreicht zum Zeitpunkt $t = 0$ ein homogenes Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}_0$, welches nur im Bereich $x \geq 0$ existiert (Bild 6).

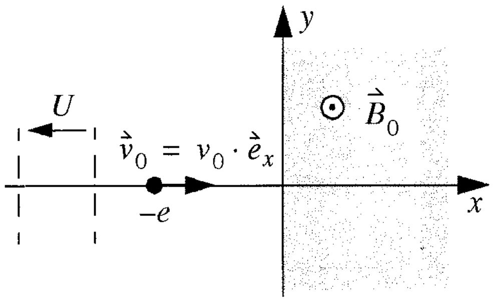



Bild 6

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit $v_0 \ll c$ beim Eintritt in das Magnetfeld?

b) Berechnen Sie die Lorentz–Kraft $\vec{F}_0$, die für $t = 0$ auf das Elektron wirkt.

c) Warum bewegt sich das Elektron im Bereich des Magnetfeldes auf einer Kreisbahn? Berechnen Sie den Radius der Kreisbahn.

HINWEIS: Zentripetalkraft einer Kreisbahn mit Radius $R$: $F_z = m_0 \cdot v^2/R$

d) Wo, zu welchem Zeitpunkt $t_1$ und in welcher Richtung verlässt das Elektron das Magnetfeld?

e) Welche kinetische Energie hat das Elektron vor dem Eintritt in das Magnetfeld und nach dem Austritt?

22. DEZ. 2009

GET3 GÜ 12

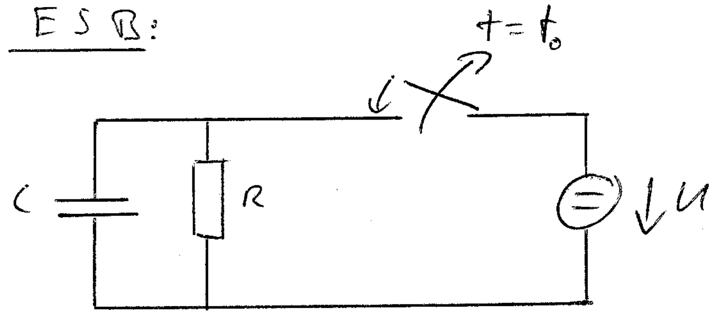
Fortsetzung Aufg 23.)

$Q(t) = ?$

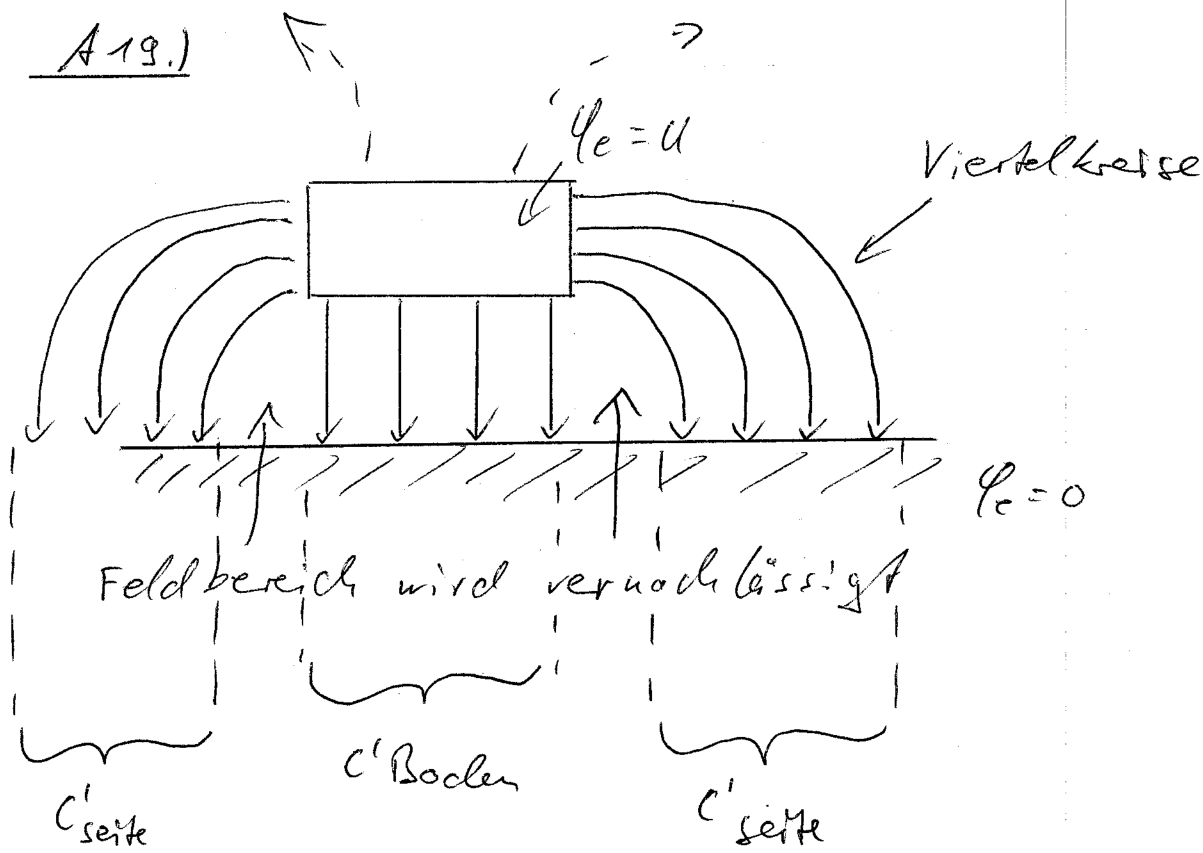
$Q = D \cdot A$

$\rightarrow Q(t) = \varepsilon \cdot E(t) \cdot A$

ESB:




A 19.)

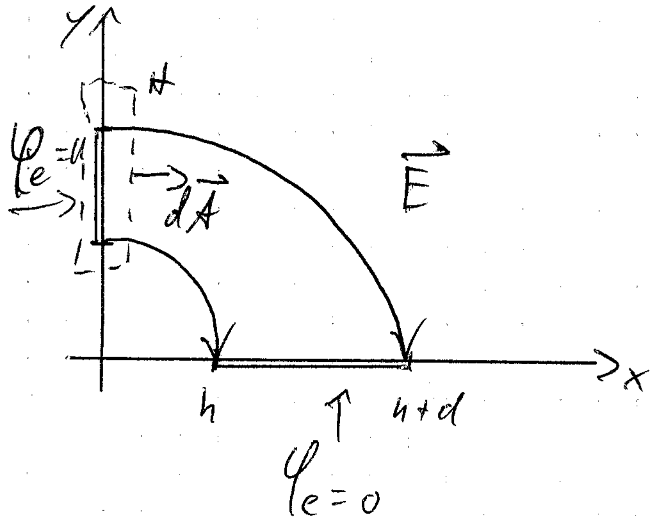



Näherung: $C' \approx C'_{Boden} + 2 \cdot C'_{Seite}$

$$C'_{Boden} = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{w \cdot l}{h} \cdot \frac{1}{l} = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{w}{h}$$

$$= 56{,}7 \ \frac{pF}{m}$$

$C'_{seite}$ entspricht dem Winkelkond. aus Aufg. 17 mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$




$$E_{seite} = -U \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2} \cdot \rho} \cdot \vec{e_\phi} \quad \text{für } 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$
$$h < \rho < h+d$$

$$\vec{D}_{seite} = -\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 U}{\frac{\pi}{2} \cdot \rho} \cdot \vec{e_\phi}$$

Mit $C = \frac{Q}{U}$

$$C'_{seite} = \frac{\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A}}{U} \cdot \frac{1}{l}$$

$$d\vec{A} = l \cdot d\rho \cdot (-\vec{e_\phi})$$

(Es gilt auch $d\vec{A} = dz \cdot dy \cdot \vec{e_x}$)

$$C'_{seite} = \frac{1}{l \cdot U} \cdot l \cdot \int_{\rho=h}^{h+d} \left(-\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 U}{\frac{\pi}{2} \rho} \cdot \vec{e_\phi}\right) \cdot (-d\rho \cdot \vec{e_\phi})$$

$$= \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{h+d}{h}\right) \approx 15{,}6\,pF/m$$

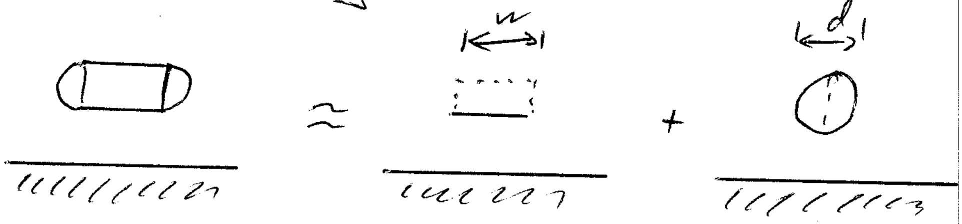
Also $\underline{\underline{C' \approx 88 pF \frac{1}{m}}}$

(untere Abschätzung)

GET3 GÜ 12

22. DEZ. 2009

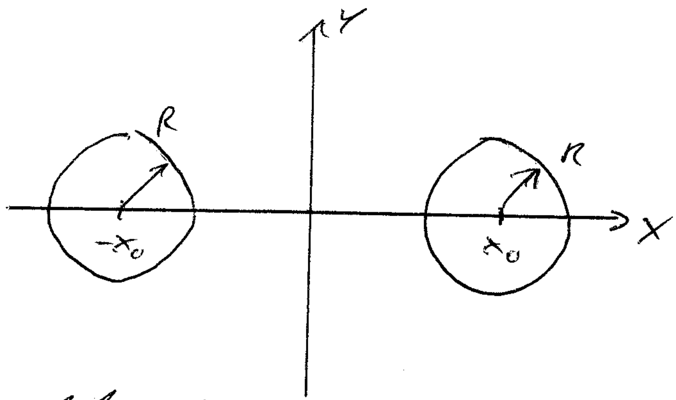
b.) Modellierung des Streufeldes



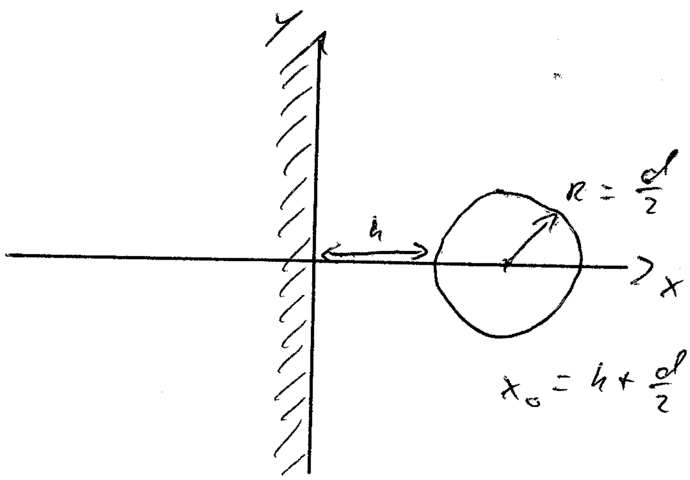

jetzt: obere Abschätzung

aus Aufg. 18c.) ist bekannt:

$C'_{ZZ}$ zwischen zwei Zylindern mit dem Achsenabstand $2x_0$



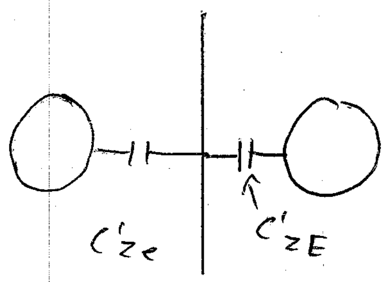

gesucht: $C'_{ZE}$ zwischen einem der Zylinder und der y-z-Ebene.



$$\rightarrow \frac{x_0}{R} = \frac{h + d/2}{d/2} = \frac{2h+d}{d}$$

$C'_{22}$ entspricht der Reihenschaltung zweier $C'_{ZE}$

Also: $C'_{22} = \frac{1}{2} C'_{ZE}$



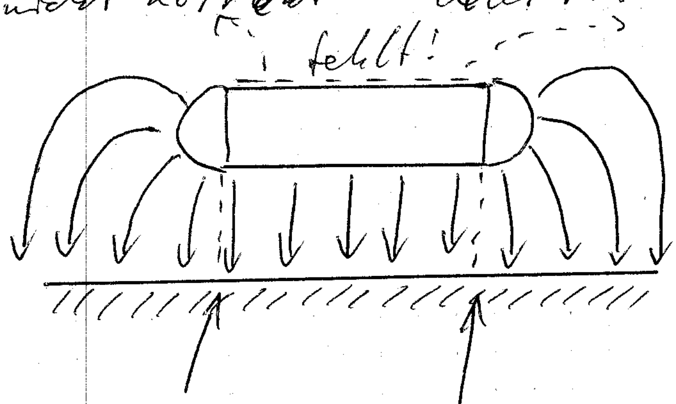

$$\rightarrow C'_{ZE} = 2 \cdot \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln\left[\frac{2h+d}{d} + \sqrt{\left(\frac{2h+d}{d}\right)^2 - 1}\right]}$$

$$\underline{\underline{\approx 126{,}2\,\mathrm{pF}\,\frac{1}{m}}}$$

c.) $C'_{Boden} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{w}{h} = 56{,}7\,\mathrm{pF}\,\frac{1}{m}$

$C' = C'_{Boden} + C'_{ZE} = 182{,}9\,\mathrm{pF}\,\frac{1}{m}$

Auch hier wird das Feld der Anordnung nicht korrekt modelliert:




Hier müsste $E_z$ stetig sein!

GET3 GÜ 12

22. DEZ. 2009

neue freiwillige Hausaufgabe bis zum Di. 12.1.2010:

Aufg. 24

Eigene Vorbereitung zum Durchflutungsgesetz:

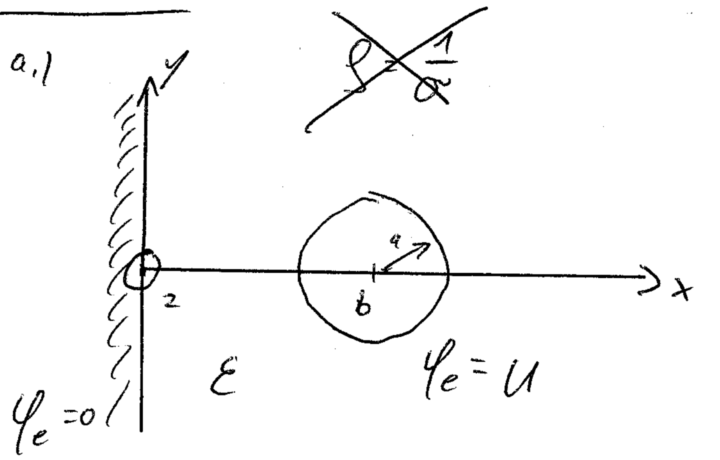
H05 Aufg. 3

F06-T1 Aufg. 3

zugelassene Hilfsmittel
zur Übungsklausur am 8.1.10:
zwei handgeschriebene A4-Blätter

## Aufg. 25.1

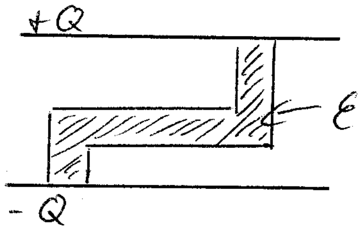
a.)

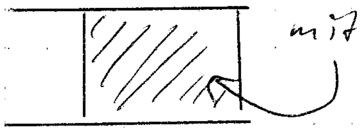



el. stat. Ersatzanordnung: $\rho \to \varepsilon$

das geht nur, weil das gesamte Feldgebiet mit Material gefüllt ist!

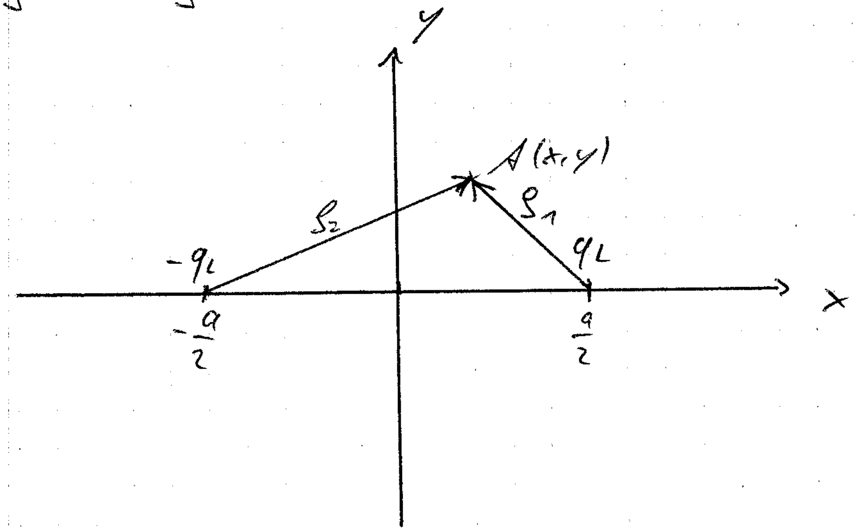
Beispiel:





mit $\sigma$ und $\varepsilon$

**b.)** für die Ersatzanordnung
vgl. Aufg. 16




2 Unbekannte: $q_L$, $d$

$$k = \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow d = 2 \cdot \sqrt{b^2 - a^2}$$

Bestimmung des Abstandes zwischen den Linienladungen $d$, vgl. KGÜ

$$\begin{array}{ccccc} a^2 & + & R^2 & = & x_M^2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \left(\frac{d}{2}\right)^2 & & a^2 & & b^2 \end{array}$$

Mit Abstand $d$ sind auch $\rho_1$ und $\rho_2$ bekannt:

$$\rho_1 = \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} \qquad \rho_2 = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}$$

Aus Aufg. 18 kennen wir die Spannung zwischen <u>2</u> Zylindern:

GET3 GÜ 12 22. DEZ. 2009

$$U_{12} = \frac{q_L}{\pi \varepsilon_0} \ln(k_1)$$

hier: $U = \frac{1}{2} U_{12}$

mit $k_1 = \frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}$

vgl. Aufg. 16:

$$\varphi_e = \frac{q_L}{2\pi \varepsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

daraus folgt U als Potenzialdifferenz zwischen zwei Punkten.

$$\rightarrow q_L = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln(k_1)} U$$

$$\rightarrow \varphi_e = \frac{U}{\cancel{\ln(k_1)}} \cancel{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}$$

weiter b.)

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} E$$

Möglich wäre: $\vec{E} = -\operatorname{grad}(\varphi_e)$

$$= -\vec{e}_x \frac{\partial \varphi_e}{\partial x} - \vec{e}_y \frac{\partial \varphi_e}{\partial y}$$

vgl. Aufg. 9 (Liniendipol)

Dort war der Abstand $= 2a$
(hier: d)

$$E_x = \frac{U \cdot d}{\ln(k_1)} \cdot \frac{x^2 - y^2 - \frac{1}{4} d^2}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

$$E_y = \frac{U \cdot d}{\ln(k_1)} \frac{2xy}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

$$\vec{J} = \frac{U \cdot d}{\rho \ln(k_1)} \cdot \frac{1}{\rho_1^2 \rho_2^2} \Big[ (x^2 - y^2 - \tfrac{1}{4} d^2) \vec{e_x} + 2xy \, \vec{e_y} \Big]$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}$$

c.) Ansatz: Leitwert pro Länge über die Analogie: Kapazität pro Länge

Aufg.: $c' = \frac{q_L}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(k_1)}$

vgl (3.6.17)

Leitwert pro Länge: $G' = \frac{\sigma}{\varepsilon} c'$
$= \frac{1}{\rho\varepsilon} \cdot c'$
$= \frac{2\pi}{\rho \ln(k_1)}$

$\Rightarrow I' = G' \cdot U = \frac{U}{\rho} \cdot \frac{2\pi}{\ln(k_1)}$

Aufg. 22)

a₁) Lösungsansatz für $\vec{E}$ in Kugelkoordinaten

- innen ($|\vec{r}| = r < R$):

homogenes Feld

$$\vec{E_i} = E_i \cdot \vec{e_z}$$
$$= E_i \cdot (\cos(\theta) \cdot \vec{e_r} - \sin(\theta) \cdot \vec{e_\theta})$$

GET3 GÜ 12

22. DEZ. 2009

- außen $(r > R)$: Überlagerung

$$\vec{E}_a = \vec{E}_0 + \vec{E}_D$$

$$= E_0 \left(\cos(\theta)\vec{e_r} - \sin(\theta)\vec{e_\theta}\right) + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3}\left(2\cos(\theta)\cdot\vec{e_r} + \sin(\theta)\vec{e_\theta}\right)$$

(vgl. Aufg. 14)