

Fortsetzung Aufg. 14:

...

Allg.: vektorielles Dipolmoment

$$\vec{p} = Q \cdot \vec{d} \quad \stackrel{\text{hier}}{=} \quad Q \cdot d \cdot \vec{e}_z$$

Weiter gilt:  $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \cos(\theta)$ 

$$\stackrel{\text{hier}}{\rightarrow} p \cdot \vec{e}_r = p \cdot \cos(\theta)$$

$$\varphi_D(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3}$$

zur Erinnerung:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$ Die gezeigte Formel gilt für einen Punktdipol im Ursprung, aber jetzt mit beliebiger Orientierung  $\vec{d}$  bzw.  $\vec{p}$ .

d)

$$\vec{E} = - \text{grad } \varphi_D$$

$$= - \left( \frac{\partial \varphi_D}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_D}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \underbrace{\frac{1}{r \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial \varphi_D}{\partial \phi}}_{=0} \cdot \vec{e}_\phi \right)$$

Es soll gelten:  $\vec{p} = p \cdot \vec{e}_z$ 

$$= - \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( -2 \cdot \frac{\cos(\theta)}{r^3} \cdot \vec{e}_r - \frac{\sin(\theta)}{r^3} \cdot \vec{e}_\theta \right)$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left( 2 \cos(\theta) \vec{e}_r + \sin(\theta) \cdot \vec{e}_\theta \right)$$

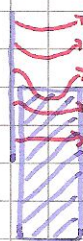
$$|\vec{E}_D| \sim \frac{1}{r^3} \quad ; \quad \varphi_D \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\text{vgl. Punktladung: } |\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2} \quad ; \quad \varphi \sim \frac{1}{r}$$

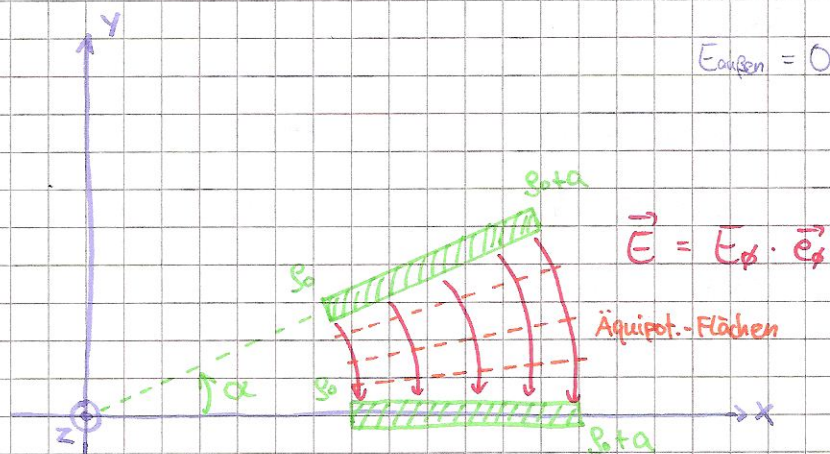
Hausaufgabe bis zum 8.12.09: Aufg. 21



eigentl. real:



# Aufg. 17:



idealisierte Feldverlauf  $\vec{E}(\vec{r}) = E_\phi(\rho, \phi) \cdot \vec{e}_\phi$

$\Rightarrow$  Feldlinien verlaufen auf Kreisbögen

gesucht: Feldverlauf  $\rho_0 \leq \rho \leq \rho_0 + a$   
 $0 \leq z \leq b$   
 $0 < \phi < \alpha$

a)

Die Feldliniendichte ist unabhängig von  $\phi$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_\phi(\rho) \cdot \vec{e}_\phi \quad \text{für } 0 < \phi < \alpha$$

Anmerkung: Außerhalb der Platten keine (Raum-) Ladung

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \operatorname{div} \vec{E} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow E_\phi = \text{const. bzgl. } \phi \quad (0 < \phi < \alpha)$$

laut Aufgabe: Spannung  $U$  zwischen den Platten

vgl. Plattenkondensator:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \underbrace{E \cdot d}_{\text{const.}} = U_{12} \quad d \hat{=} \text{Länge d. el. Feldlinien}$$

$$\text{hier: } d = d(\rho) = \alpha \cdot \rho \quad \text{für } 0 < \phi < \alpha$$



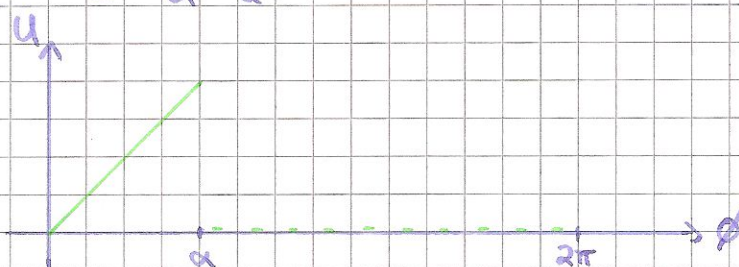
$$\vec{E}(\vec{r}) = - \frac{U}{\alpha \cdot s} \cdot \vec{e}_\phi \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} 0 < \phi < \alpha \\ 0 < z < b \end{array}$$

Integration entlang Kreisbogen

$$d\vec{s} = s \cdot d\phi \cdot \vec{e}_\phi$$

Integration für den Innenraum (zwischen den Platten)

$$\begin{aligned} \varphi_e(\phi) &= \underbrace{\varphi_e(\phi=0)}_{=0} - \int_{\phi'=0}^{\phi} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= - \int_{\phi'=0}^{\phi} E_\phi \cdot s \cdot d\phi' \\ &= + \frac{U}{\alpha \cdot s} \cdot s \cdot \phi \\ &= U \cdot \frac{\phi}{\alpha} \end{aligned}$$



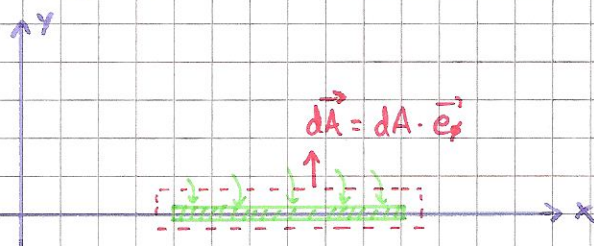
b)

$$\vec{D}(s, \phi \rightarrow 0_+)$$

↳ Oberseite d. unteren Platte

$$= \epsilon_0 \cdot E_\phi(s) \cdot \vec{e}_\phi$$

$$= - \frac{\epsilon_0 \cdot U}{\alpha \cdot s} \cdot \vec{e}_\phi$$



$$\text{Mit } dA = b \cdot ds$$

Ladung der unteren Platte:

$$Q = \oint_H \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$= \int_{s=s_0}^{s=s_1} \left( - \frac{\epsilon_0 \cdot U}{\alpha \cdot s} \cdot \vec{e}_\phi \right) \cdot b \cdot ds \cdot \vec{e}_\phi \quad (\text{Deckel d. Hüllfläche})$$

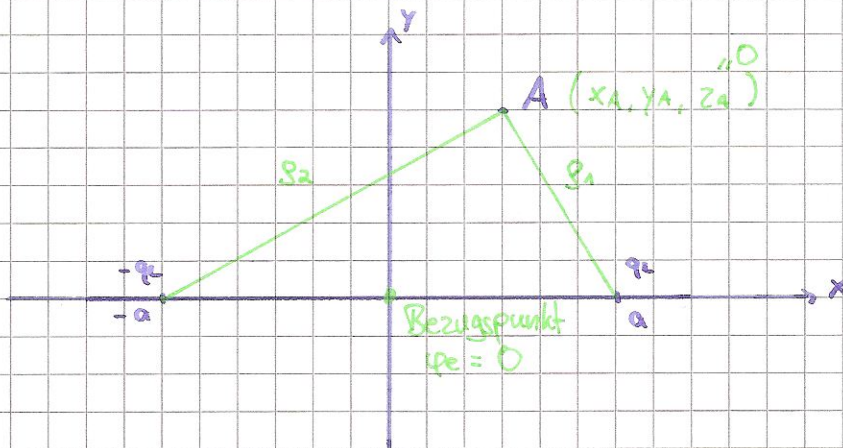
$$= - \epsilon_0 \cdot U \cdot b \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \int_{s=s_0}^{s=s_1} \frac{1}{s} ds$$

$$= - \frac{\epsilon_0 \cdot U \cdot b}{\alpha} \cdot \ln\left(\frac{s_1}{s_0}\right)$$

$$c) \quad C \quad (= \frac{Q}{\epsilon_0}) = \frac{\oint_V \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\oint_V \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow C = \epsilon_0 \cdot b \cdot \frac{1}{a} \cdot \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)$$

Aufg. 16:



a)

gesucht:  $\varphi_e = f(g_1, g_2)$

Wir betrachten einen Aufpunkt A in der xy-Ebene  
(weil die Komponente  $z_A$  hier keine Rolle spielt)

Potential einer Linienladung in der z-Achse:

$$\varphi_e(\vec{r}) = \varphi_e(g) = \underbrace{\varphi_e(g_0)}_{=0} - \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{g}{g_0}\right)$$

abwandeln für  $q_L$  bei  $x = a$ :

Ersetze  $g$  durch  $g_1$

$g_0$  durch  $a$

$$\varphi_{e1}(g_1) = - \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{g_1}{a}\right)$$

für die linke Linienladung:

ersetze  $g$  durch  $g_2$

$g_0$  durch  $a$

$q_L$  durch  $-q_L$

$$\rightarrow \varphi_{e2}(g_2) = \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{g_2}{a}\right)$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned}\varphi_e(p_1, p_2) &= \varphi_{e1}(p_1) + \varphi_{e2}(p_2) \\ &= \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \cdot \left[ \ln\left(\frac{p_2}{a}\right) - \ln\left(\frac{p_1}{a}\right) \right] \\ &= \frac{q_L}{2\pi\epsilon} \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\end{aligned}$$

b)

Äquipotentialfläche:

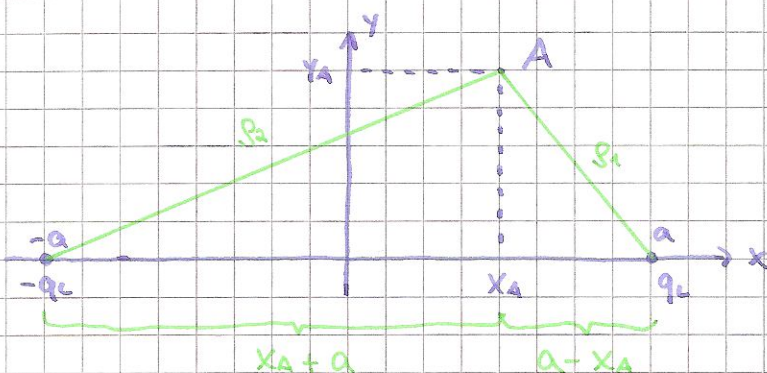
$$\varphi_e(p_1, p_2) \stackrel{!}{=} \text{const.}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \stackrel{!}{=} \text{const.}$$

$$\text{also } k := \frac{p_2}{p_1} \stackrel{!}{=} \text{const.}$$

$$\text{d.h. } k^2 = \frac{p_2^2}{p_1^2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 = \text{const.}$$

c)



$$p_2^2 = (x_A + a)^2 + y_A^2$$

$$p_1^2 = (a - x_A)^2 + y_A^2$$

$$= (x_A - a)^2 + y_A^2$$

Äquipotentialbedingung:

$$\frac{p_2^2}{p_1^2} = \frac{(x_A + a)^2 + y_A^2}{(x_A - a)^2 + y_A^2} = k^2 \stackrel{!}{=} \text{const.}$$

d)

$$(x_A + a)^2 + y_A^2 = k^2 \cdot (x_A - a)^2 + k^2 \cdot y_A^2$$

$$\Leftrightarrow x_A^2 + 2x_A a + a^2 + y_A^2 - k^2(x_A^2 - 2x_A a + a^2) - k^2 y_A^2 = 0$$

$\Leftrightarrow$