Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 10 vom 15. Dezember 2009

Teil A

Aufgabe A34 Berechnen Sie

$$I = \int_{\partial G} \left(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2\right)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\omega \text{ mit}$$
$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, ax^2 + by^2 + cz^2 < 1\right\},\ a,b,c > 0\,.$$

Aufgabe A35 Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Stokes das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma \left(2y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y - z^2\mathrm{d}z\right) \text{ mit } \gamma(t) = (3\cos t, 3\sin t, 0),\ 0 \le t \le 2\pi,$$

wobei Γ die Randkurve des Flächenstücks $\mathcal{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 9, z > 0\right\}$ ist.

Aufgabe A36 Unter einer im Gebiet $G \in \mathbb{R}^2$ exakten Differentialgleichung versteht man eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung $a(x,u(x)) + b(x,u(x))\,u'(x) = 0$ für welche es eine *Stammfunktion* $h : G \to \mathbb{R}^2$ gibt, sodass gilt:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = a(x,y),\ \frac{\partial h}{\partial y} = b(x,y)\ \forall (x,y) \in G.$$

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$a(x,u(x)) + b(x,u(x))\,u'(x) = 0$$

mit $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a(x,y) := \sinh(x^2+y) + 2x^2\cosh(x^2+y)$ und $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $b(x,y) := x\cosh(x^2+y)$, wobei $(x,y) \in G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\right\}$.

a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung in G exakt ist, und bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit.

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung u, welche $u(1) = -1$ erfüllt.

Aufgabe A37 Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, gegeben durch

$$f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}} \quad , n \in \mathbb{N},$$

auf $[0,\infty)$ gleichmäßig konvergiert. Gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \ ?$$

Teil B

Aufgabe B35 Sei N der in das Äußere der von der Fläche $\mathcal{F}$ berandeten Körpers weisende Normalenvektor. Berechnen Sie das Integral $\int_{\mathcal{F}} v \cdot N d\omega$ mit $v = \left(z^2 - x, -xy, 3z\right)$ und $\mathcal{F}$ die Oberfläche des Körpers, der durch die Flächen $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$ und $z = 0$ begrenzt wird.

Aufgabe B36 Es sei

$$\mathcal{F} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 < z < 1 \right\} \text{ mit } a,b > 0$$

und $v(x,y,z) = \left(x \sin z, -x^2 y, y \cos z\right)$. Berechnen Sie $\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot}(v) \cdot N d\omega$, wobei N der ins Äußere des Zylinders weisende Normalenvektor sei.

Aufgabe B37 Beantworten Sie folgende Fragen:

(a) Was ist eine reguläre Kurve?

(b) Was ist ein reguläres Flächenstück? Was ist eine reguläre Fläche?

(c) Was besagt der Satz von Gauß? Was sind seine Voraussetzungen?

(d) Was besagt (inkl. Voraussetzungen) der Satz von Stokes?

Aufgabe B38 Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, gegeben durch

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{2n^2 x}{(n^2 + x^2)^2} \quad , n \in \mathbb{N},$$

auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert. Gilt $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$?

AM3 GÜ10 16. DEZ. 2009

A34.) Berechne $I = \int\limits_{\partial G} (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^{\frac{1}{2}} \, d\omega$

mit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax^2 + by^2 + cz^2 < 1\}$, $a, b, c > 0$

$\Rightarrow$ G ist Ellipsoid mit Halbachsen $\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}$

mit Randfläche $\partial G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax^2 + by^2 + cz^2 = 1\}$

impl. Darstellung durch $\underbrace{ax^2 + by^2 + cz^2 - 1}_{f(x,y,z)} = 0$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \\ 2cz \end{pmatrix} \perp \partial G$$

$\Rightarrow N(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}} \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix}$ ist die Einheitsnormale welche ins Äußere zeigt, von ∂G.

gewünschter Ausdruck: $\int\limits_{\partial G} v \cdot N \, d\omega$

$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix}$ erfüllt $v \cdot N = (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^{\frac{1}{2}}$

$$I = \int\limits_{\partial G} (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^{\frac{1}{2}} \, d\omega$$

$$= \int\limits_{\partial G} v \cdot N \, d\omega \overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_{G} \operatorname{div}(v) \, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_G a+b+c \; dx\,dy\,dz = (a+b+c) \cdot \int_G 1 \; dx\,dy\,dz$$

Verwende elliptische Kugelkoordinaten:

$$x = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot r \cdot \cos(\phi) \sin(\vartheta) \qquad 0 \le r \le 1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot r \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\vartheta) \qquad 0 \le \phi \le 2\pi$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot r \cdot \cos(\vartheta) \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$

Fkt.-Det.: $r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot \frac{1}{\sqrt{abc}}$

$$I = (a+b+c) \cdot \int_G 1 \; dx\,dy\,dz$$

$$= (a+b+c) \cdot \int_{r=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{abc}} \cdot r^2 \sin(\vartheta) \, d\vartheta \, d\phi \, dr$$

$$= \frac{a+b+c}{\sqrt{abc}} \cdot \frac{4\pi}{3}$$

A35.) Berechne $I := \int_\Gamma (2y\,dx + 3x\,dy - z^2\,dz)$

mit $\gamma(t) := (3\cos(t), 3\sin(t), 0) \qquad 0 \le t \le 2\pi$

und Γ Randkurve von $F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=9, \; z>0\}$

$$I = \int_\Gamma v \; d\gamma \quad \text{mit } v = \begin{pmatrix} 2y \\ 3x \\ -z^2 \end{pmatrix}$$

F obere Hälfte der Kugeloberfläche mit Radius $r=3$ und Mittelpunkt 0.

$$\Rightarrow F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{9-x^2-y^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \underbrace{x^2+y^2 < 9}_{D} \right\}$$

d.h. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 9\}$,

d.h. $F = \underline{x}(D)$ mit $\underline{x}(x,y,z) = (x, y, \sqrt{9-x^2-y^2})$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} v \, d\gamma \overset{\text{stokes}}{=} \int_{D} \operatorname{rot}(v(\underline{x}(x,y))) \cdot \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial y}\right)(x,y) \, dx \, dy$$

$\cancel{\operatorname{rot}(v)}$ mit $v = \begin{pmatrix} 2y \\ 3x \\ -z^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot}(v) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2y \\ 3x \\ -z^2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -x/\sqrt{9-x^2-y^2} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -y/\sqrt{9-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial y} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \int_D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \end{pmatrix} dx \, dy = \int_D 1 \, dx \, dy = \underline{\underline{9\pi}}$$

A36.)

exakte DGL:

$$a(x, u(x)) + b(x, u(x))\, u'(x) = 0$$

für welche es eine Stammfunktion h gibt.

d.h. $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = a(x,y), \quad \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = b(x,y)$

Aufg.: $a(x,y) := \sinh(x^2+y) + 2x^2\cosh(x^2+y)$

$b(x,y) := x \cdot \cosh(x^2+y)$, mit $(x,y) \in G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$

Idee: $\int_\Gamma f \cdot d\gamma$ ist in G vom Weg unabh.

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in G$ gilt.

$\Leftrightarrow \exists h: G \to \mathbb{R}$, diff'bar so dass

$f = \nabla h$ in G gilt.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial y} &= \cosh(x^2+y) + 2x^2\sinh(x^2+y) \\ \frac{\partial b}{\partial x} &= \cosh(x^2+y) + x \cdot \sinh(x^2+y) \cdot 2x \end{aligned}\right\} \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$$

$\Rightarrow \exists h$ mit $\dfrac{\partial h}{\partial x} = a, \ \dfrac{\partial h}{\partial y} = b \Rightarrow$ DGL ist exakt in G.

Bestimme h: $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = b(x,y) = x\cosh(x^2+y)$

$\tilde{h}(x,y) = x \cdot \sinh(x^2+y) + c(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\tilde{h}(x,y) = \underbrace{\sinh(x^2+y) + 2x^2\cosh(x^2+y)}_{a(x,y)} + c'(x)$$

$\Rightarrow h(x,y) = x \cdot \sinh(x^2+y) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Die Lösungsgesamtheit ist die Menge aller diff'baren Funktionen u, die $h(x, u(x)) = x \cdot \sinh(x^2 + u(x)) = c$ erfüllen.

HM3 GÜ10

b.) $-c = h(1, u(1)) = 1 \cdot \sinh(1^2 + (-1)) = 0$

$\Rightarrow x \cdot \sinh(x^2 + u(x)) = 0 \iff 0 = \sinh(x^2 + u(x))$

$\iff 0 = x^2 + u(x) \iff u(x) = -x^2$

A37.) Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ gegeben durch $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = \frac{x}{n^2} \cdot e^{-\frac{x}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

zeigen: $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig auf $[0, \infty)$ konvergent.

gilt $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$?

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n^2} = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{x}{n}} = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

$\Rightarrow$ Grenzfkt. $f(x) = 0$

Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ und $n \geq N$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{n^2} \cdot e^{-\frac{x}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{|x|}{n} \cdot e^{-\frac{x}{n}} \qquad \left(\begin{array}{l} e^t \geq 1 + t \\ e^{-t} \leq \frac{1}{1+t} \end{array} \right)$$

$$\leq \frac{1}{n} \underbrace{\frac{|x|}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{n}}}_{\leq 1}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{n}{|x|} + \frac{x}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{|x|}}_{1}} \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon .$$

$\Rightarrow$ gleichmäßige Konvergenz

$$\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \underbrace{\frac{x}{n} \cdot \frac{1}{n} e^{-x/n}}_{=\frac{d}{dx}\left(-e^{-x/n}\right)} \,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\left[-\frac{x}{n} e^{-\frac{x}{n}} \right]_0^b - \int_0^b \frac{1}{n}(-1) e^{-x/n}\,dx \right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{b}{n} e^{-\frac{b}{n}} - e^{-b/n} + 1 \right) \underline{= 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx \underline{= 1} \neq 0 = \int_0^\infty f(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$