Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 09 vom 7. Dezember 2009

Teil A

Aufgabe A31 Γ sei die Schnittkurve der Flächen $z = x^2 + y^2$ und $z = x$, für die ihre Projektion auf die x, y–Ebene (vom Punkt $(0, 0, 1)$ aus gesehen) positiv orientiert ist. Ferner sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) := \left(-y + xe^{x^2-z^2}, z - ye^{z^2-x^2}, x - ze^{x^2-z^2}\right)$$

gegeben. Berechnen Sie

$$\int_\Gamma f \cdot d\gamma .$$

Aufgabe A32 Betrachten Sie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$f(x, y, z) := (y\cos(xy) + \exp(z), x\cos(xy), x\exp(z)) .$$

Untersuchen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f \cdot d\gamma$$

zunächst auf Wegunabhängigkeit in $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie anschließend den Wert des Kurvenintegrals für die Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, parametrisiert durch $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) := \left(t, t^2, \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right).$$

Aufgabe A33 Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \left(\frac{1}{16}x^2 - y, \frac{1}{8}yz, y\right)$ und die Fläche

$$\mathfrak{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{y^2}{20} + \frac{z^2}{20} = 1, z \geq \frac{1}{2}x + 2\right\} .$$

Mithilfe des Satzes von Stokes berechne man

$$\int_{\mathfrak{F}} (\mathrm{rot} f) \cdot N d\omega .$$

(Hierbei sei N die Normale auf $\mathfrak{F}$ mit positiver z-Komponente.)

Teil B

Aufgabe B32 Seien $G := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 > 0\right\}$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,z) := \frac{1}{x^2+y^2+z^4}\,(x,y,2z^3)$$

gegeben. Untersuchen Sie, ob das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f \cdot d\gamma$$

in G vom Weg unabhängig ist. Berechnen Sie dann den Wert des Kurvenintegrals für die Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrisiert durch $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) := \left(4\cos(t), 4\sin(t), \frac{t}{2\pi}\right).$$

Aufgabe B33 Gegeben sei das Kurvenintegral

$$I(\Gamma) := \int_\Gamma \left(1 - z^2 + \cos(x)\sin(y)e^{\sin(x)}\right) dx + \cos(y)e^{\sin(x)}\,dy - 2xz\,dz\,.$$

a) Ist $I(\Gamma)$ in $\mathbb{R}^3$ vom Wege unabhängig?

b) Berechnen Sie $I(\Gamma)$ für die Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrisiert durch $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t), \sin(t))\,.$$

Aufgabe B34 Seien das Vektorfeld $f(x,y,z) = \left(x+z, xz, y^2 - x\right)$ und die Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2 \le 1, z = 2 - x^2 - y^2\right\} \text{ gegeben.}$$

(a) Man bestimme das Vektorfeld $N : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$ der Einheitsnormalen auf $\mathcal{F}$ mit positiver dritter Komponente.

(b) Man verwandle das Flächenintegral

$$I := \int_\mathcal{F} (\operatorname{rot} f) \cdot N d\omega$$

mittels des Satzes von Stokes in ein Kurvenintegral.

(c) Man berechne I.

AM3 KGÜ 9

1. Hauptsatz über Kurvenintegrale

Kurvenintegral $\int_\Gamma \underline{f} \cdot d\underline{x}$ genau dann in G vom Weg unabh., wenn es keine reellwertige Fkt. $h: G \to \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt: $\underline{f}(\underline{x}) = \nabla h(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in G$.

2. Hauptsatz über KI

$G \subseteq \mathbb{R}^3$ konvexes Gebiet, $\underline{F} = (A, B, C)$ in $\overline{G}$ stetig diff'bar. Dann ist $\int_\Gamma \underline{F} \cdot dx$ genau dann vom Weg unabh., wenn gilt: $\operatorname{rot}(\underline{F}) = 0$ in G.

II 32.)

geg.: $G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$

$$f := \frac{1}{x^2 + y^2 + z^4} (x, y, 2z^3)$$

ges.: $\int_\Gamma f\, dx$ wegunabhängig?

Berechne $\int_\Gamma f\, dx$ für Γ param. durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 4\cos(t) \\ 4\sin(t) \\ t/2\pi \end{pmatrix}$$

Da G nicht konvex ist, kann 2. HS über KI nicht verwendet werden.

Wende 1. HS an:

Es muss also eine Fkt. $h: G \to \mathbb{R}$ gefunden werden mit $f = \nabla h$.

$$\int \frac{x}{x^2+y^2+z^4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^4) + C$$

Da $(0,0,0) \notin G$ ist, kann man definieren:
$h: G \to \mathbb{R}$ mit $h(x,y,z) := \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^4)$

$$\partial_x h(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^4} = f_1(x,y,z),$$

$$\partial_y h(x,y,z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2+z^4} = f_2(x,y,z)$$

$$\partial_z h(x,y,z) = \frac{1}{2}\,\frac{4z^3}{x^2+y^2+z^4} = f_3(x,y,z)$$

Somit gilt $\nabla h = f$ in G und $\int_\Gamma f\,d\gamma$ ist in G vom Weg unabh.

$$\int_\Gamma f\,d\gamma = \int_I f(\gamma(t))\frac{d\gamma}{dt}\,dt$$

$$= \int_I f\circ\gamma(t)\,\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4^2+\frac{t^4}{(2\pi)^4}}\left(4\cos(t), 4\sin(t), \frac{t^3}{4\pi^3}\right)\left(-4\sin(t), 4\cos(t), \frac{1}{2\pi}\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{16+\frac{t^4}{(2\pi)^4}}\left[-16\cos(t)\sin(t) + 16\cos(t)\sin(t) + \frac{t^3}{8\pi^4}\right]dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2^4\pi^4}{2^8\pi^4+t^4}\cdot\frac{t^3}{2^3\pi^4}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2t^3}{2^8\pi^4+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\ln(2^8\pi^4+t^4)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\pi^4(2^8+2^4)\right) - \ln(2^8\pi^4)$$

HM3 KGÜ 9

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2^8 + 2^4}{2^8}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+2^{-4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{17}{16}\right) = \underline{\underline{\ln\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)}}$$

$\gamma(0) = (4,0,0)$; $\gamma(2\pi) = (4,0,1)$

$\gamma^*(t) = (4,0,t) \quad t \in [0,1]$

Wegunabhängigkeit erlaubt es, auch die Kurve $\Gamma^*: \gamma^*(t)$ zu betrachten.

$$\int_\Gamma f\,d\gamma = \int_{\Gamma^*} f\,d\gamma^* = \int_0^1 \frac{1}{4^2+t^4}\left(4,0,2t^3\right)(0,0,1)\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2t^3}{4^2+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left(16+t^4\right)\Big|_0^1 = \ln\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)$$

VI 33.)

$$I(\Gamma) = \int_\Gamma \left(1-z^2+\cos(x)\sin(y)\cdot e^{\sin(x)}\right)dx + \cos(y)e^{\sin(x)}\,dy - 2xz\,dz$$

$$f := \begin{pmatrix} 1-z^2+\cos(x)\sin(y)e^{\sin(x)} \\ \cos(y)e^{\sin(x)} \\ -2xz \end{pmatrix}$$

Dann ist f im $\mathbb{R}^3$ stetig diff'bar.
$\mathbb{R}^3$ ist ein konvexes Gebiet, daher ist der 2. HS über KI anwendbar.

Es gilt:

$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ -2z + 2z \\ \cos(y)\cos(x)e^{\sin(x)} - \cos(x)\cos(y)e^{\sin(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $I(\Gamma)$ in $\mathbb{R}^3$ vom Weg unabh.

b.) $I(\Gamma)$ berechnen für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), \sin(t))$

$\gamma(0) = (1, 0, 0) = \gamma(2\pi)$

Damit gilt wegen der Wegunabh. nach (a.) $\underline{\underline{I(\Gamma) = 0}}$

T 34.) <u>Satz von Stokes ~~im~~ Raum:</u>

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ ein fach zusammenhängendes Gebiet.

∂U reguläre Kurve : $\partial U = \gamma[a, b]$, γ regulär.

$\underline{x} : \overline{U} \to \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow F = \underline{x}(U)$ regul. Flächenstück mit reg. Rand

$\Gamma = \underline{x}(\gamma[a, b])$

$$\int_F \mathrm{rot}(\underline{f}) \cdot \underline{n} \cdot d\omega \overset{\text{Stokes}}{=} \int_\Gamma \underline{f} \cdot d\underline{x}$$

$$\overset{\text{Param.}}{=} \int_t f(\underline{x}(\gamma(t))) \cdot \frac{d}{dt} \cdot \underline{x}(\gamma(t))\, dt$$

AM3 KGÜ 9 15. DEZ. 2009

geg: Vektorfeld $f(x,y,z)$
$= (x+z,\ xz,\ y^2-x)$

Fläche $\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 1,\ z = 2-x^2-y^2\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 2-x^2-y^2,\ (x,y) \in U\}$

$U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 < 1$

U ist einfach zusammenhängendes Gebiet.
∂U reguläre Kurve param. durch
$\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

$\underline{x}(x,y) = (x, y, 2-x^2-y^2)$,

$\Rightarrow \underline{x}(U) = \mathcal{F}$
$\Gamma = \underline{x}(\gamma[0,2\pi])$, $\underline{x}(\gamma(t)) = (\cos(t), \sin(t), 2-1)$

<u>a.)</u> $n'(x,y) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$

$n(x,y) = \frac{n'(x,y)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$

<u>b.)</u> $I = \int_{\mathcal{F}} \mathrm{rot}(f)\, n\, d\omega \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\Gamma} f\, dx$

$= \int_{t} f(\underline{x}(\gamma(t)))\ \frac{d}{dt}\underline{x}(\gamma(t))\ dt$

$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t)+1 \\ \cos(t) \\ \sin^2(t)-\cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt$

c)

$$= \int_0^{2\pi} -\sin(t)\cos(t) - \underbrace{\sin(t)}_{=0} + \cos^2(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{-\frac{1}{2}\sin(2t)}_{=0} + \cos^2(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt$$

$*$ $\cos^2(t) = \cos(2t) + \sin^2(t)$

$= \cos(2t) + 1 - \cos^2(t)$

$$\stackrel{*}{=} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)+1}{2}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, dt = \underline{\underline{\pi}}$$