Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 09 vom 7. Dezember 2009

Teil A

Aufgabe A31 Γ sei die Schnittkurve der Flächen $z = x^2 + y^2$ und $z = x$, für die ihre Projektion auf die x, y–Ebene (vom Punkt $(0,0,1)$ aus gesehen) positiv orientiert ist. Ferner sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,z) := \left(-y + xe^{x^2-z^2}, z - ye^{z^2-x^2}, x - ze^{x^2-z^2}\right)$$

gegeben. Berechnen Sie

$$\int_\Gamma f \cdot d\gamma .$$

Aufgabe A32 Betrachten Sie das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$f(x,y,z) := (y\cos(xy) + \exp(z), x\cos(xy), x\exp(z)) .$$

Untersuchen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f \cdot d\gamma$$

zunächst auf Wegunabhängigkeit in $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie anschließend den Wert des Kurvenintegrals für die Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, parametrisiert durch $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) := \left(t, t^2, \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right).$$

Aufgabe A33 Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = \left(\frac{1}{16}x^2 - y, \frac{1}{8}yz, y\right)$ und die Fläche

$$\mathfrak{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{y^2}{20} + \frac{z^2}{20} = 1, z \geq \frac{1}{2}x + 2\right\} .$$

Mithilfe des Satzes von Stokes berechne man

$$\int_{\mathfrak{F}} (\mathrm{rot} f) \cdot N d\omega .$$

(Hierbei sei N die Normale auf $\mathfrak{F}$ mit positiver z-Komponente.)

Teil B

Aufgabe B32 Seien $G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 0\}$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,z) := \frac{1}{x^2 + y^2 + z^4}(x, y, 2z^3)$$

gegeben. Untersuchen Sie, ob das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f \cdot d\gamma$$

in G vom Weg unabhängig ist. Berechnen Sie dann den Wert des Kurvenintegrals für die Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrisiert durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) := \left(4\cos(t), 4\sin(t), \frac{t}{2\pi}\right).$$

Aufgabe B33 Gegeben sei das Kurvenintegral

$$I(\Gamma) := \int_\Gamma \left(1 - z^2 + \cos(x)\sin(y)e^{\sin(x)}\right) dx + \cos(y)e^{\sin(x)}\, dy - 2xz\, dz.$$

a) Ist $I(\Gamma)$ in $\mathbb{R}^3$ vom Wege unabhängig?

b) Berechnen Sie $I(\Gamma)$ für die Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrisiert durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t), \sin(t)).$$

Aufgabe B34 Seien das Vektorfeld $f(x,y,z) = (x + z, xz, y^2 - x)$ und die Fläche

$$\mathcal{F} = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 2 - x^2 - y^2\} \text{ gegeben.}$$

(a) Man bestimme das Vektorfeld $N : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$ der Einheitsnormalen auf $\mathcal{F}$ mit positiver dritter Komponente.

(b) Man verwandle das Flächenintegral

$$I := \int_{\mathcal{F}} (\mathrm{rot} f) \cdot N d\omega$$

mittels des Satzes von Stokes in ein Kurvenintegral.

(c) Man berechne I.

Satz von Stokes

$U \subset \mathbb{R}^2$ einfach zus.-h. Gebiet

$\underline{x} : \bar{U} \to \mathbb{R}^3$ $\begin{cases} 2\times \text{ stetig diff'bar, regulär in } U \\ 1\times \text{ — " — } \bar{U} \end{cases}$

$\mathcal{F} = \underline{x}(U)$ reguläres Flächenstück

∂U reg. Kurve, $\partial U = \gamma([a,b])$, γ regulär

Rand von $\mathcal{F}$: $\partial \mathcal{F} = \Gamma = \underline{x}(\gamma([a,b]))$

Satz v. Stokes

$$\int_U \operatorname{rot}(Q(\underline{x}(u,v))) \cdot \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial v}\right)(u,v)\, du\, dv$$

$$= \int_a^b Q(\underline{x}(\gamma(t))) \cdot \frac{d}{dt}\underline{x}(\gamma(t))\, dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot}(Q) \cdot n \, d\omega = \oint_{\Gamma} Q \, d\underline{x}$$

Q Vektorfeld stetig diff'bar auf einer Umgebung von $\mathcal{F}$

A31.)

Γ Schnittkurve der Flächen

$z = x^2 + y^2$, $z = x$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) = (-y + x \cdot e^{x^2-z^2},$
$z - y \cdot e^{z^2-x^2},$
$x - z e^{x^2-z^2})$

Berechne: $\int_\Gamma f \cdot d\gamma$

$z = x^2 + y^2 = x \iff (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}, \; z = x$

Γ ist Randkurve d. Flächen~~integral~~stücks

$\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = z; (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 < \frac{1}{4}\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = z; (x,y) \in U\}$ mit

$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 < \frac{1}{4}\}$

$\underline{x}: \bar{U} \to \mathbb{R}^3$, $\underline{x}(x,y) = (x,y,x)$

$\Rightarrow \mathcal{F} = \underline{x}(U)$. U einfach zusammenhängendes Gebiet

∂U ist reguläre Kurve mit Parametrisierung

$\gamma: [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sin(t))$

Stokes $\Rightarrow$

$$\int_\Gamma f \cdot d\underline{x} = \int_U \operatorname{rot}(f(\underline{x}(x,y))) \cdot \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial y}\right)(x,y)\, dx\,dy$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial y} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

AM3 GÜ9

$$\operatorname{rot}(f(x,y,z)) = (\partial_y f_3 - \partial_z f_2, \partial_z f_1 - \partial_x f_3, \partial_x f_2 - \partial_y f_1)$$

$$= (-1 + 2yz\, e^{z^2-x^2}; x; 2xy\, e^{z^2-x^2} + 1)$$

$$I = \int_V \begin{pmatrix} 2xy-1 \\ x \\ 2xy+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx\,dy$$

$$= \int_V -2xy + 1 + 2xy + 1 \, dx\,dy$$

$$= 2 \int_V 1 \, dx\,dy$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

A32.) 2. Hauptsatz über Kurvenintegrale
$G \subset \mathbb{R}^3$ konvex, f in $\overline{G}$ stetig diff'bares Vektorfeld

$\int_\Gamma f \cdot dx$ vom Weg unabh. in G

$\Leftrightarrow \operatorname{rot}(f) = 0$ in G.

hier: $f(x,y,z) = (y\cos(x \cdot y) + e^z,$
$x\cos(x \cdot y),$
$x e^z)$

$$\operatorname{rot}(f(x,y,z)) = (0-0, e^z - e^z, \cos(xy) - xy\sin(xy) + xy\sin(xy) - \cos(xy))$$

$$= (0,0,0)$$

$\Rightarrow \operatorname{rot}(f) = 0$ in $\mathbb{R}^3$, d.h. $\int_\Gamma f dx$

ist in $\mathbb{R}^3$ vom Weg unabh.

$\Gamma: \gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^3, \; \gamma(t) = (t, t^2, \sin(\frac{\pi}{2}t))$

$$\int_\Gamma f \, dx = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2\cos(t^3) + e^{\sin(\frac{\pi}{2}t)} \\ t \cdot \cos(t^3) \\ t \cdot e^{\sin(\frac{\pi}{2}t)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix} dt$$

Problem: $\int_0^1 e^{\sin(\frac{\pi}{2}t)} \, dt$

Aber $\int_\Gamma f \cdot dx$ ist wegunabh., d.h. wir wählen anderen Weg von $\gamma(0)$ nach $\gamma(1)$

$\gamma(0) = (0,0,0) \qquad \gamma(1) = (1,1,1)$

$\Gamma^*: \gamma^*(t) = (t,t,t), \; t \in [0,1]$

$$\int_\Gamma f \, dx = \int_{\Gamma^*} f \, dx = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \cdot \cos(t^2) + e^t \\ t \cdot \cos(t^2) \\ t \cdot e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \ldots = \underline{\underline{\sin(1) + e}}$$

HM3 GÜ 9

09. DEZ. 2009

A33.) $V(x,y,z) = (3y, -xz, yz^2)$

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 2z,\ 0 < z < 2\}$

Berechne: $\int_F \operatorname{rot}(V) \cdot N \, d\omega$, wobei N

die Normale auf F mit pos. z-Komponente ist.

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{x^2+y^2}{2},\ x^2+y^2 < 4\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{x^2+y^2}{2};\ (x,y) \in U\}$ mit

$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4\}$, U ist einfach zus.-h. Gebiet

$\underline{x}(x,y) = (x, y, \frac{1}{2}(x^2+y^2))$

∂U wird parametrisiert durch $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (2\cos(t), 2\sin(t))$

$\partial F = \Gamma = \underline{x}(\gamma(t)) = (2\cos(t), 2\sin(t), 2)$; $t \in [0, 2\pi]$

$\overset{\text{stokes}}{\Rightarrow} I := \int_F \operatorname{rot}(V) \cdot N \, d\omega = \int_\Gamma V \, dx$; wenn N

„die richtige" Normale ist.

$\frac{\partial \underline{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \underline{x}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

$I = \int_0^{2\pi} V(\underline{x}(\gamma(t))) \cdot \frac{d}{dt} \underline{x}(\gamma(t)) \, dt$

$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 6 \cdot \sin(t) \\ -4\cos(t) \\ 8\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$$= \int_0^{2\pi} -12 \sin^2(t) - 8\cos^2(t)\, dt = \underline{\underline{-20\pi}}$$