Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 08 vom 1. Dezember 2009

Teil A

Aufgabe A27 Gegeben sei die reguläre Fläche

$$\mathcal{F} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z > 1\right\}.$$

Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}} \left(x^2 + y(x+y) + z(x+y+z)\right) \mathrm{d}\omega.$$

Aufgabe A28 Zu dem Ellipsoid

$$\mathcal{E} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\right\}$$

bezeichne N die äußere Einheitsnormale an $\mathcal{E}$. Berechnen Sie für das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$f(x,y,z) := \left(x^2 + y + z, y^2 - 3x + z^5, -2z(x+y) + \sin(xy)\right)$$

den Wert des Flächenintegrals

$$\int_{\mathcal{E}} f \cdot N \mathrm{d}\omega.$$

Aufgabe A29 Sei N der in das Äußere des von der Fläche F berandeten Körper weisende Normalenvektor. Berechnen Sie das Integral

$$\int_F v \cdot N \mathrm{d}\omega$$

mit $v = \left(xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z\right)$ und $F = F_1 \cup F_2$, wobei

$$F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > 0\right\}$$

und

$$F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le a^2, z = 0\right\}$$

mit $0 < a \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe A30 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

(a) Zeigen Sie: $\nabla f(x, y, z) = -\dfrac{(x, y, z)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$.

(b) Berechnen Sie weiter: $\Delta f(x, y, z) = 0$ für alle $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$.

(c) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\partial B_1(0)} \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} \cdot n \, d\omega$, wobei n der äußere Normalenvektor sei. Warum kann man den Satz von Gauß hier nicht anwenden?

0 8. DEZ. 2009

Teil B

Aufgabe B29 Gegeben sei die reguläre Fläche

$$\mathcal{F} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z > 0\right\}.$$

Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \, d\omega .$$

Aufgabe B30 Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal differenzierbares Vektorfeld. Beweisen sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathrm{rot}\,(\nabla f) = 0$,

(b) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}) = 0$,

(c) $\mathrm{rot}(fw) = \nabla f \times w + f\,\mathrm{rot}(w)$,

(d) $\mathrm{div}(fw) = \nabla f \cdot w + f\,\mathrm{div}(w)$,

(e) $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,w = \nabla \mathrm{div}\,w - \Delta\,w$.

Aufgabe B31 Berechnen Sie für den Körper $G := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2 < z < 3, \sqrt{x^2 + y^2 + 2} < z\right\}$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$f(x, y, z) := \left(-x^2 - y^2 + z^2 - 2\right)(x, y, z)$$

den Wert des Volumenintegrals

$$\int_G \mathrm{div} f \, dx dy dz .$$

HM3 KGÜ 8

B29.)

geg: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4, z>0\}$

ges: $\int_F \frac{x^2+y^2+2z^2}{1+x^2+y^2+z^2} \, d\omega$

Satz 5.5.

F reguläre Fläche

F Graph einer reellen Fkt. $h: D \to \mathbb{R}$, so

gilt: $\int_F f(x,y,z)\, d\omega = \int_D f(x,y,h(x,y)) \sqrt{1+|\partial_x h(x,y)|^2+|\partial_y h(x,y)|^2} \, dx\,dy$

Forme F so um, dass F Graph einer reellen Fkt. $h: D \to \mathbb{R}$ ist, $D \subset \mathbb{R}^2$

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = \sqrt{4-x^2-y^2} =: h(x,y), (x,y) \in D\}$

mit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2<4\}$ (Kreis mit Radius 2)

$\partial_x h(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $\partial_y h(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

$|\partial_x h(x,y)|^2 = \frac{x^2}{4-x^2-y^2}$, $|\partial_y h(x,y)|^2 = \frac{y^2}{4-x^2-y^2}$

$$\int_D \frac{x^2+y^2+2\cdot(4-x^2-y^2)}{1+x^2+y^2+4-x^2-y^2} \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}} \, dx\,dy$$

$$= \int_D \frac{8-x^2-y^2}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \, dx\,dy$$

$$= \iint \frac{8-r^2}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{4-r^2}} \, r\,dr\,d\varphi$$

$$= \frac{2}{5}\, 2\pi \int_0^2 \frac{8-r^2}{\sqrt{4-r^2}}\, r\, dr$$

$$u'(r) = \frac{r}{\sqrt{4-r^2}} \qquad u(r) = -\sqrt{4-r^2}$$

$$v(r) = 8-r^2 \qquad v'(r) = -2r$$

$$= \frac{4\pi}{5} \cdot \left[-\sqrt{4-r^2}\,(8-r^2) \Big|_0^2 - \int_0^2 2r\sqrt{4-r^2}\, dr \right]$$

$t = 4-r^2$

$dt = -2r\,dr$

$$= \frac{4\pi}{5}\left(16 + \int_4^0 \sqrt{t}\, dt\right)$$

$$= \frac{4\pi}{5}\left(16 - \int_0^4 \sqrt{t}\, dt\right) = \frac{4\pi}{5}\left(16 - \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_0^4\right)$$

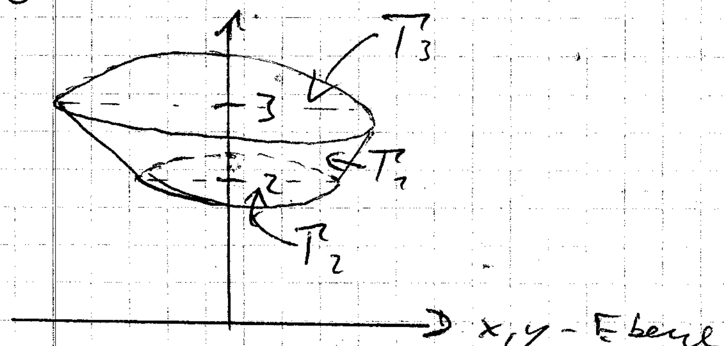
$$= \frac{4\pi}{5}\left(16 - \frac{2}{3}\, 8\right) = \frac{4\pi}{5} \cdot \frac{32}{3} = \underline{\underline{\frac{128}{15}\pi}}$$

II 31.)

geg.: $G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 < z < 3 \ \sqrt{x^2+y^2+2} < z\}$

Vektorfeld: $\underline{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) := (-x^2-y^2+z^2-2)(x,y,z)$

ges: $\int_G \operatorname{div}(f)\, dx\, dy\, dz$



HM3 KGÜ 8 08. DEZ. 2009

Satz 6.3.

$G \subset \mathbb{R}^3$ beschränktes Gebiet,

$f : \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ Vektorfeld,

$$\int_G div(\underline{f})\, dx\,dy\,dz = \oint_{\partial G} \underline{f} \cdot \underline{n}\, d\omega$$

n äußere Normale

$$\int_G div(f)\, dx\,dy\,dz \overset{Gauß}{=} \int_{\Gamma_1} f \cdot n \cdot d\omega + \int_{\Gamma_2} f \cdot n \cdot d\omega + \int_{\Gamma_3} f n\, d\omega$$

$$\partial G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = \sqrt{2 + x^2 + y^2}, 2 < z < 3\}$$

$$\cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = 2, z > \sqrt{2 + x^2 + y^2}\}$$

$$\cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = 3, z > \sqrt{2 + x^2 + y^2}\}$$

$\int_{\Gamma_1} f \cdot n \cdot d\omega$, $z^2 = 2 + x^2 + y^2$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = (-x^2 - y^2 - 2 + 2 + x^2 + y^2)(x,y,z)$$

$$= (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} 0\, d\omega = \underline{\underline{0}}$$

$\int_{\Gamma_2} f n\, d\omega$, $\Gamma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = 2, 2 < x^2 + y^2\}$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = (-x^2 - y^2 - 2 + 4)(x,y,z)$$

$$\int_{\Gamma_2} (-x^2 - y^2 + 2)(x,y,z) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} d\omega$$

$$= \int_{\Gamma_2} (-x^2 - y^2 + 2)(-2)\, d\omega$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)\, r\, dr\, d\varphi = -4\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)\, r\, dr$$

$$\overset{\text{subs } t=2-r^2}{=} + 2\pi \int_2^0 t\, dt = -2\pi \int_0^2 t\, dt$$

$$= -2\pi \, \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^2 = \underline{\underline{-4\pi}}$$

$$\int_{\Gamma_3} f\, n\, d\omega, \quad \Gamma_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z=3, x^2+y^2<7\}, \; n = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\int_{\Gamma_3} (-x^2-y^2+7)(x,y,z)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} d\omega = \int_{\Gamma_3} (-x^2-y^2+7)\, 3\, d\omega$$

$$= 3\int_0^{\sqrt{7}}\int_0^{2\pi} (7-r^2)\, r\, d\varphi\, dr$$

$$= 6\pi \int_0^{\sqrt{7}} (7-r^2)\, r\, dr \overset{\text{subs}}{=} 6\pi \int_7^0 -\frac{1}{2} t\, dt$$

$$= 3\pi \int_0^7 t\, dt = 3\pi \left[\frac{1}{2} t^2\right]_0^7 = \frac{3}{2}\, 49\, \pi = \underline{\underline{\frac{147}{2}\pi}}$$

$$\text{Damit: } \underline{\underline{\int_G \operatorname{div}(f)\, dx\, dy\, dz = \frac{139}{2}\pi}}$$

HM3 KGÜ 8

08. DEZ. 2009

__B30.)__ $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $f = f(x,y,z)$

__a.)__

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = \operatorname{rot}(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$$
$$= (\partial_{yz} f - \partial_{zy} f, \partial_{zx} f - \partial_{xz} f, \partial_{xy} f - \partial_{yx} f)$$
$$\underline{\underline{= (0,0,0)}}$$

b.)

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\omega)) = \operatorname{div}(\partial_y \omega_3 - \partial_z \omega_2, \partial_z \omega_1 - \partial_x \omega_3, \partial_x \omega_2 - \partial_y \omega_1)$$
$$= \partial_{xy} \omega_3 - \partial_{xz} \omega_2 + \partial_{yz} \omega_1 - \partial_{yx} \omega_3 + \partial_{zx} \omega_2 - \partial_{zy} \omega_1$$
$$\underline{\underline{= 0}}$$

c.)

$$\operatorname{rot}(f\omega) = (\partial_y (f\omega_3) - \partial_z (f\omega_2), \partial_z (f\omega_1) - \partial_x (f\omega_3), \partial_x (f\omega_2) - \partial_y (f\omega_1))$$

$$= \left((\partial_y f)\omega_3 - (\partial_z f)\omega_2, (\partial_z f)\omega_1 - (\partial_x f)\omega_3, (\partial_x f)\omega_2 - (\partial_y f)\omega_1\right)$$
$$+ (f\partial_y \omega_3 - f\partial_z \omega_2, f\partial_z \omega_1 - f\partial_x \omega_3, f\partial_x \omega_2 - f\partial_y \omega_1)$$
$$= (\operatorname{grad}(f)) \times \omega + f(\operatorname{rot}(\omega))$$

d.)

$$\operatorname{div}(f\omega) = \partial_x(f\omega_1) + \partial_y(f\omega_2) + \partial_z(f\omega_3)$$

$$= \underline{(\partial_x f)\omega_1} + \underline{f\partial_x\omega_1}$$
$$+ \underline{(\partial_y f)\omega_2} + \underline{\partial_y f\omega_2}$$
$$+ \underline{(\partial_z f)\omega_3} + \underline{f\partial_z\omega_3}$$

$$= \underline{(\operatorname{grad}(f))\omega} + \underline{f(\operatorname{div}(\omega))}$$

e.)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\omega))$$

$$= \operatorname{rot}(\partial_y\omega_3 - \partial_z\omega_2, \partial_z\omega_1 - \partial_x\omega_3, \partial_x\omega_2 - \partial_y\omega_1)$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_{yx}\omega_2 - \partial_{yy}\omega_1 - \partial_{zz}\omega_1 + \partial_{zx}\omega_3 \\ \partial_{zy}\omega_3 - \partial_{zz}\omega_2 - \partial_{xx}\omega_2 + \partial_{xy}\omega_1 \\ \partial_{xz}\omega_1 - \partial_{xx}\omega_3 - \partial_{yy}\omega_3 + \partial_{yz}\omega_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_{xx}\omega_1 + \partial_{yx}\omega_2 + \partial_{zx}\omega_3 \\ \partial_{yy}\omega_2 + \partial_{zy}\omega_3 + \partial_{xy}\omega_1 \\ \partial_{zz}\omega_3 + \partial_{xz}\omega_1 + \partial_{yz}\omega_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_{xx}\omega_1 + \partial_{yy}\omega_1 + \partial_{zz}\omega_1 \\ \Delta\omega_2 \\ \Delta\omega_3 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\underline{\omega})) - \Delta\underline{\omega}$$