Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 08 vom 1. Dezember 2009

Teil A

Aufgabe A27 Gegeben sei die reguläre Fläche

$$\mathcal{F} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z > 1\right\}.$$

Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}} \left(x^2 + y(x + y) + z(x + y + z)\right) \mathrm{d}\omega.$$

Aufgabe A28 Zu dem Ellipsoid

$$\mathcal{E} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\right\}$$

bezeichne N die äußere Einheitsnormale an $\mathcal{E}$. Berechnen Sie für das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$f(x, y, z) := \left(x^2 + y + z, y^2 - 3x + z^5, -2z(x + y) + \sin(xy)\right)$$

den Wert des Flächenintegrals

$$\int_{\mathcal{E}} f \cdot N \mathrm{d}\omega.$$

Aufgabe A29 Sei N der in das Äußere des von der Fläche F berandeten Körper weisende Normalenvektor. Berechnen Sie das Integral

$$\int_F v \cdot N \mathrm{d}\omega$$

$$\text{mit } v = \left(xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z\right) \text{ und } F = F_1 \cup F_2 \text{, wobei}$$

$$F_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > 0\right\}$$

und

$$F_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0\right\}$$

mit $0 < a \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe A30 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

(a) Zeigen Sie: $\nabla f(x, y, z) = -\dfrac{(x, y, z)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3}$.

(b) Berechnen Sie weiter: $\Delta f(x, y, z) = 0$ für alle $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$.

(c) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\partial B_1(0)} \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} \cdot n \, \mathrm{d}\omega$, wobei n der äußere Normalenvektor sei. Warum kann man den Satz von Gauß hier nicht anwenden?

Teil B

Aufgabe B29 Gegeben sei die reguläre Fläche

$$\mathcal{F} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z > 0\right\}.$$

Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{1 + x^2 + y^2 + z^2} \, \mathrm{d}\omega .$$

Aufgabe B30 Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal differenzierbares Vektorfeld. Beweisen sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathrm{rot}\,(\nabla f) = 0$,

(b) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}) = 0$,

(c) $\mathrm{rot}(f w) = \nabla f \times w + f\,\mathrm{rot}(w)$,

(d) $\mathrm{div}(f w) = \nabla f \cdot w + f\,\mathrm{div}(w)$,

(e) $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, w = \nabla \mathrm{div}\, w - \Delta\, w$.

Aufgabe B31 Berechnen Sie für den Körper $G := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2 < z < 3,\ \sqrt{x^2 + y^2 + 2} < z\right\}$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$f(x, y, z) := \left(-x^2 - y^2 + z^2 - 2\right)(x, y, z)$$

den Wert des Volumenintegrals

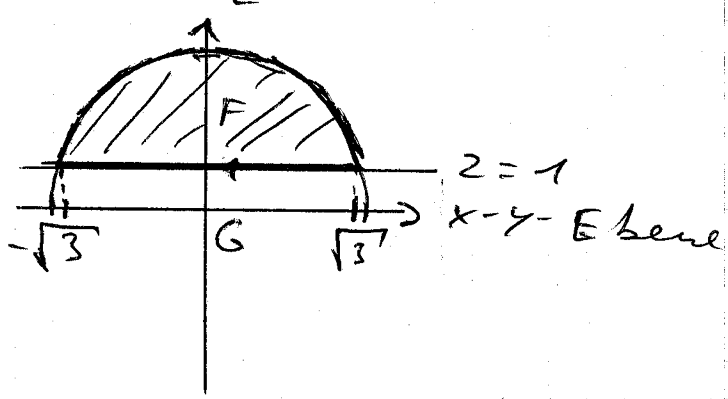
$$\int_G \mathrm{div} f \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

A27.)

$F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4,\ z > 1\}$

Berechne $I := \int_F (x^2 + y(x+y) + z(x+y+z))\, d\omega$

Skizze:



$G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 3$

F ist der Graph von $z := \sqrt{4-x^2-y^2}$ auf G.

$$I = \int_F \left(x^2 + y(x+y) + \sqrt{4-x^2-y^2}\left(x+y+\sqrt{4-x^2-y^2}\right)\right) d\omega$$

$$= \iint_G \left(\left(x^2 + y(x+y) + \sqrt{4-x^2-y^2}\left(x+y+\sqrt{4-x^2-y^2}\right)\right)\right) \sqrt{1+|\nabla z|^2}\, dx\,dy$$

Allgemein: $d\omega = \|N\|\, dx\,dy$

$$\nabla z = \left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}; \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\right)$$

$$1 + |\nabla z^2| = 1 + \frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2} = \frac{4}{4-x^2-y^2}$$

$$I = 2 \int_G \frac{x^2 + y(x+y) + \sqrt{4-x^2-y^2}\left(x+y+\sqrt{4-x^2-y^2}\right)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dx\,dy$$

Polarkoordinaten: $x = r\cdot\cos(\varphi)$ $y = r\cdot\sin(\varphi)$

Fkt.-D: r

$0 < r < \sqrt{3}\ ,\ 0 < \varphi < 2\pi$

$$I = 2 \int_{r=0}^{\sqrt{3}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r \cdot \left(r\cos(\varphi) + r\sin(\varphi) + \sqrt{4-r^2} + \frac{r^2 + r^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{\sqrt{4-r^2}} \right) d\varphi\, dr$$

$$= 2 \int_{r=0}^{\sqrt{3}} r \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{4-r^2+r^2}{\sqrt{4-r^2}}\, d\varphi\, dr$$

$$= 4\pi \int_{r=0}^{\sqrt{3}} \frac{4r}{\sqrt{4-r^2}}\, dr = 16\pi \int_{r=0}^{\sqrt{3}} \frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\, dr$$

$$= 16\pi \left[-\sqrt{4-r^2} \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 16\pi \cdot (-1+2) = \underline{\underline{16\pi}}$$

<u>A28.)</u> $\mathcal{E} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y + z \\ y^2 - 3x + z^5 \\ -2z(x+y) + \sin(xy) \end{pmatrix}$$

Berechne $\int_{\mathcal{E}} f \cdot N\, d\omega$

Prüfen Vor. v. Satz vom Gauß

$G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 < 1\}$
ist beschränkt und $\mathcal{E} = \partial G$ ist reguläre Fläche.

Die Komp. von f sind stetig diff'bar auf $\mathbb{R}^3$.

02. DEZ. 2009

$$\int_E f \cdot N d\omega \overset{\text{Gauß}}{=} \int_G \operatorname{div}(f) \cdot dx\,dy\,dz$$

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y+z) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 3x + z^5)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(-2z(x+y) + \sin(xy)\right)$$

$$= 2x + 2y - 2(x+y) \underline{= 0}$$

$$\Rightarrow \int_E f\, N d\omega \overset{\text{Gauß}}{=} \int_G \operatorname{div}(f)\, dx\,dy\,dz = \int_G 0\, dx\,dy\,dz$$

$$\underline{\underline{= 0}}$$

A 29.) Berechne $\int_F v \cdot N d\omega$

$v = (xz^2, x^2 y - z^3, 2xy + y^2 z)$

$F = F_1 \cup F_2$

$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a^2, z > 0\}$

$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq a^2, z = 0\}$

$a > 0$

N äußerer Normalenvektor des von F begrenzten Körpers

F ist Rand d. oberen Halbkugel K mit Radius a (und Mittelpunkt im Koordinatensystem-Ursprung)

$\partial K = F$

Satz v. Gauß
$\Rightarrow I := \int_F v \cdot N \, d\omega = \int_K \operatorname{div}(v) \, dx\,dy\,dz$

$\operatorname{div}(v) = z^2 + x^2 + y^2 \Rightarrow I = \int_K x^2+y^2+z^2 \, dx\,dy\,dz$

Trafo in Kugelkoordinaten

$x = r \cdot \cos(\varphi) \sin(\theta) \qquad 0 < r < a$

$y = r \sin(\varphi) \sin(\theta) \qquad 0 < \varphi < 2\pi$

$z = r \cdot \cos(\theta) \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Fkt-D: $r^2 \sin(\theta)$

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{a} r^2 \cdot r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1}{5} a^5 \cdot \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{5} a^5 \underbrace{\left[-\cos(\theta)\right]_0^{\pi/2}}_{=1} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{5} a^5}}$$

AM3 GÜ 8

A 30.) $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

a.) ∇f: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \cdot \cancel{2}x$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y,z) = -\frac{(x,y,z)}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

b.) $\Delta f(x,y,z) = 0$ für alle $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= -\frac{1\sqrt{x^2+y^2+z^2} - x\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^6}$$

$$= -\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{-3} + 3x^2\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{-5}$$

$$\Delta f = -3\sqrt{x^2+y^2+z^2} + 3(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,-5}$$

$$\underline{\underline{= 0}}$$

c.)

$$I := \int_{\partial B_1(0)} \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} \cdot n \, d\omega$$

Wichtig: Satz von Gauß nicht anwendbar, da Singularität vom Vektorfeld in $0 \in B_1(0)$

Äußerer Normalenvektor an (x,y,z) auf $\partial B_1(0)$ ist (x,y,z)

$$\Rightarrow I = \int_{\partial B_1(0)} \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2} \cdot (x,y,z) \, d\omega$$

$$= \int_{\partial B_1(0)} \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \, d\omega = \text{Kugeloberfläche}$$

$$\underline{\underline{= 4\pi}}$$