Grundgebiete der Elektrotechnik III
Kleingruppenübung WS 09/10 - Musterlösung

Aufgabe 8:

Vorwort: Worum geht's bei dieser Aufgabe ? Wir haben einen unendlich langen idealen Linienleiter der einzig und allein auf der z-Achse liegt. Das heißt alles rundherum gehört NICHT zum Leiter, sondern soll nur zeigen wohin der Strom I' fließt.

Aufgabenteil a.)

Hier wird gefordert, dass wir die Stromdichte $\vec{J}$ bestimmen ... Dies kann man nun auf zweierlei weise machen. Entweder auf die schnelle indem man es schon sieht worum es geht (daher steht dort auch "keine Herleitung erforderlich) oder man rechnet es wirklich aus.

Version "Schnell": Was ist eine Stromdichte ? Ein Strom pro Fläche ! In unserem Fall eine Kreisfläche und da der Strom als Strom pro Kreissegment angegeben ist um so besser. Von daher kann man schon direkt sagen, dass die Stromdichte sein muss:

$$\vec{J} = \frac{\text{Strom (pro Zylinderelement)}}{\text{pro Fläche}} \cdot \text{Radialrichtung} = \frac{I'}{2\cdot\pi\cdot\rho}\cdot\vec{e}_\rho$$

Version "Rechnen": $\Rightarrow I'\cdot l = \iint_{A_{Mantel}} \vec{J}\,\vec{dA}$ mit $\vec{dA} = \rho\cdot d\varphi\cdot dz\cdot\vec{e}_\rho$

$$\Rightarrow \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{l} J_\rho\cdot\rho\cdot d\varphi\cdot dz\cdot\vec{e}_\rho = 2\cdot\pi\cdot\rho\cdot l\cdot J_\rho$$ mit umstellen auf J_ρ kommt man auch auf $\vec{J} = \frac{I'}{2\cdot\pi\cdot\rho}\cdot\vec{e}_\rho$

In folgendem sollten wir nun die elektrische Feldstärke bestimmen. Hierzu benutzen wir das lokale Ohm'sche Gesetz $\vec{J} = \sigma\cdot\vec{E}$ und stellen diesbezüglich um. Es ist hierbei zu beachten, dass wir zwei Bereiche haben und diesbezüglich auch Fallunterscheidung durchführen müssen.
Bereich 1 erstreckt sich von $0 < \rho < R$ und Bereich 2 ersteckt sich wie folgt: $\rho > R$

Dies bedeutet wir nehmen unsere oben genannte Grundgleich und die Bedingungen aus der Aufgabe und setzen ein:

Bereich 1: $$\frac{I'}{2\cdot\pi\cdot\rho}\cdot\vec{e}_\rho = \sigma_0\cdot\left(1+\frac{\rho}{R}\right)\cdot\vec{E} \quad\Rightarrow\quad \vec{E} = \frac{I'}{2\cdot\pi\cdot\rho\cdot\sigma_0\cdot\left(1+\frac{\rho}{R}\right)}\cdot\vec{e}_\rho$$

Bereich 2: $$\frac{I'}{2\cdot\pi\cdot\rho}\cdot\vec{e}_\rho = 2\cdot\sigma_0\cdot\vec{E} \quad\Rightarrow\quad \vec{E} = \frac{I'}{4\cdot\pi\cdot\rho\cdot\sigma_0}\cdot\vec{e}_\rho$$

Aufgabenteil b.)

In Aufgabenteil b sollten wir das D-Feld berechnen. Hierfür geht man sinnigerweise über das E-Feld und nutzt die Gleichung $\vec{D} = \varepsilon\cdot\vec{E}$ Hier sind ebenso wie ebend die Bedingungen der Aufgabe zu beachten !

Hier müssen die beiden Bereiche weitergeführt werden:

Bereich 1: $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \sigma_0 \cdot \left(1 + \frac{\rho}{R}\right)} \cdot \vec{e}_\rho$

Bereich 2: $\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\rho}{R} \cdot \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \sigma_0} \cdot \vec{e}_\rho = \frac{\varepsilon_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot \cdot R \cdot \sigma_0} \cdot \vec{e}_\rho$

Aufgabenteil c.)

In Aufgabenteil c sollten wir nun die Raumladungsdichte ρ_e berechnen. Hierzu nimmt man sich die Formel $\rho_e = div\,\vec{D}$ zur Hand und rechnet mittels der Divergenz in Zylinderkoordinaten die Divergenz aus. Der relevate Teil der Divergenz in Zylinderkoordinanten lautet (da wir nur eine e_ρ-Komponente haben:

$div\,\vec{D} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \cdot D_\rho\right)$

Dies bedeutet also für unsere Bereiche:

Bereich 1: $\rho_e(\rho) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{(I \cdot \varepsilon_0)}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)}\right) = \frac{(I \cdot \varepsilon_0)}{2 \cdot \pi \cdot \sigma_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2}$

Bereich 2: $\rho_e(\rho) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{(I \cdot \varepsilon_0)}{4 \cdot \pi \cdot \sigma_0 \cdot R} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho) = \frac{(I \cdot \varepsilon_0)}{4 \cdot \pi \cdot \sigma_0 \cdot R} \cdot \frac{1}{\rho}$

Aufgabenteil d.)

In Aufgabenteil d wurde gefordert dass man q_l bestimmen möge. Wie kommt man daran... Man benutzt den Satz von Gauss und lässt $\rho \to 0$ gehen. Wieso das ? Ganz einfach... Wir haben hier einen Linienleiter einzig und allein auf der z-Achse.

$$\Rightarrow Q_{Ein} = q_l \cdot l = \lim_{\rho \to 0} \oint\!\!\!\oint_{\rho \to 0} \vec{D}\,d\vec{A} \Rightarrow \iint_{A_{Mantel}} \lim_{\rho \to 0} \frac{\varepsilon_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \sigma_0 \cdot \left(1 + \frac{\rho}{R}\right)} \cdot d\varphi \cdot dz = l \cdot q_{li} \Rightarrow \frac{I \cdot \varepsilon_0}{\sigma_0} \cdot l = q_l \cdot l$$

$$\Rightarrow ql = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \cdot I$$

Aufgabenteil e.)

In Aufgabenteil e war gefragt welche Raumpunkte als Bezugspunkte ungeeignet wären. Offensichtlich wohl 0 und ∞ wieso ? Nun wenn man sich das mal vorstellt. Was passiert denn wenn wir es in 0 legen ... Dann wird die Sache undefiniert und das Potential würde gegen unendlich gehen. Genauso bei unendlich, es wäre nicht anders.

Aufgabe 8

Aus einem unendlich langen, ideal leitenden Linienleiter, welcher sich in der z-Achse befindet, tritt pro Längeneinheit der Strom I' senkrecht zur z-Achse aus ($[I'] = 1\,\mathrm{A/m}$). Das zylinderförmige Gebiet 1 mit dem Radius R (Zylinderachse = z-Achse) besitzt die spezifische Leitfähigkeit $\sigma_1 = \sigma_0 \cdot \left(1 + \frac{\rho}{R}\right)$ und die Permittivität $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$. Für das Gebiet 2 beträgt die spezifische Leitfähigkeit $\sigma_2 = 2\sigma_0$ und die Permittivität $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \cdot \frac{\rho}{R}$.

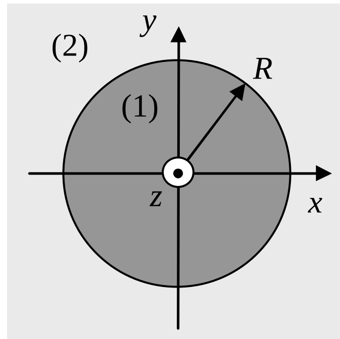

Abbildung 9

a) Geben Sie für $\rho > 0$ die elektrische Stromdichte $\vec{J}$ an (keine Herleitung erforderlich) und leiten Sie aus dem Ergebnis die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ ab.

b) Berechnen Sie die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ für $\rho > 0$.

c) Berechnen Sie die Raumladungsdichte ρ_e für $\rho > 0$.

d) Geben Sie den Ladungsbelag q_L auf dem ideal leitenden Linienleiter an.

e) Welche Orte eignen sich nicht als Bezugspunkt für das elektrische Potential?