HöMa3 Übung 7 25.11.09

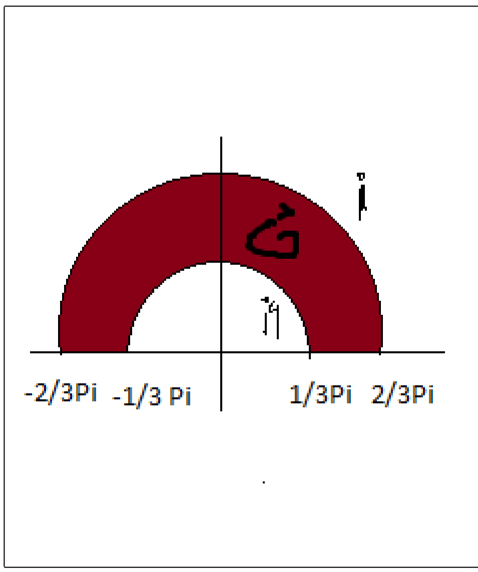
Written by Alexander Flisgen.
Fragen oder Verbesserungen an alexander.flisgen@rwth-aachen.de

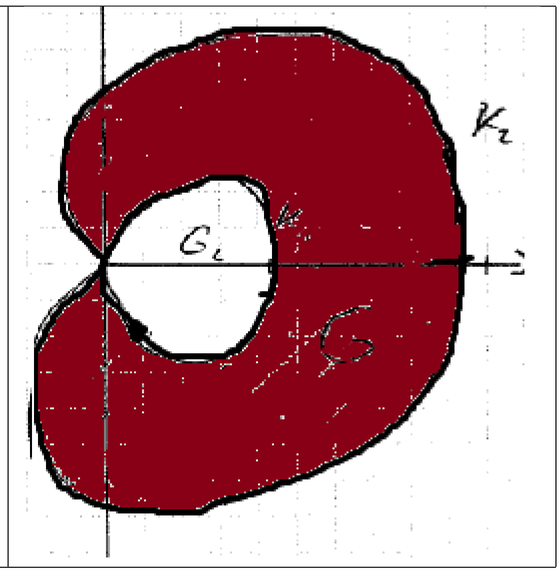
A23) $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x^2+y^2-2x\right)^2 = x^2+y^2\right\}$

Transformation in Polarkoordianten	
$x = r\cos\varphi \quad r > 0$ $y = r\sin\varphi \quad \varphi \in (-\pi, \pi)$	Funktionaldeterminante : r

$\left(x^2+y^2-2x\right)^2 = x^2+y^2$
$\Rightarrow \left(r^2 - 2r\cos\varphi\right)^2 = r^2$
$\Rightarrow r^2\left(r - 2\cos\varphi\right)^2 = r^2$
$\overset{r \geq 0}{\Rightarrow} \left(r - \cos\varphi\right)^2 = 1$
$\Rightarrow |r - \cos\varphi| = 1$

1. Fall $\quad r - 2\cos\varphi > 0 \quad \Rightarrow r = 1 + 2cos\varphi \geq 0$
   $1 \geq \cos\varphi \geq -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow -\frac{2}{3}\pi < \varphi \leq \frac{2}{3}\varphi$
2. Fall $\quad r - 2cos\varphi < 0 \quad \Rightarrow r = -1 + 2\cos\varphi \geq 0$
   $1 \geq \cos\varphi \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow -\frac{1}{3}\pi < \varphi < \frac{1}{3}\pi$





$A(G) = A(G_1) - A(G_2)$
Traansformation $G_1 \Rightarrow G_1^\star$

$A(G_1) = \int\limits_{G_1} 1 dxdy \overset{Trafo}{=} \int\limits_{G_1^\star} 1 \cdot r\, drd\varphi$

$= \int\limits_{\varphi=-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \int\limits_{r=0}^{1+2\cos\varphi} r\, drd\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} (1+2\cos\varphi)^2\, d\varphi = ...$

$= 2\pi + 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$A(G_2) = \text{Analoge Rechnung} = ... = \pi - 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$A(G) = A(G_1) - A(G_2) = 2\pi - \pi + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = \pi + 3\sqrt{3}$

A24) $F(x,y) = \left(x^2 + y^2 - 2x\right)^2 - \left(x^2 + y^2\right) = 0$

Implizite Fkt. $G < \mathbb{R}^2$, $F : G \to \mathbb{R}$

$F(x,y) = 0$ definiert auf einem Interwall $I \subset \mathbb{R}$ eine impl. Fkt. falls

$\forall x \in I\ \exists!\, y = f(x) \in \mathbb{R} : F(x, f(x)) = 0$

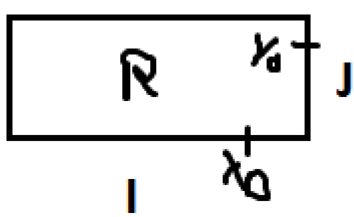
Satz über Implizite Funktionen:

$U(x_o, y_o) \subset \mathbb{R}^2$ Umgebung von (x_o, y_o)

$F : U(x_o, y_o) \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar

$F(x_o y_o) = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_o) \neq 0$

Dann existiert ein Rechteck mit $\bar{R} := \left\{ (x,y) \mid \begin{array}{cc} x \in I & y \in J \\ x_o \in I & y_o \in J \end{array} \right\}$

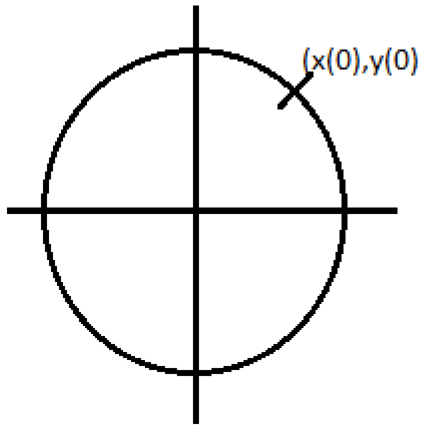


sodass $f(x,y) = 0$ nach y auflösbar ist

d.h $\exists f\ :\ I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar

mit $F(x, f(x)) = 0 \qquad \forall x \in I$

Beispiel: Einheitskreis



$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

wegen $\frac{\partial F}{\partial y}(x_o, y_0) \neq 0 \quad f(x) = y = \sqrt{1-x^2}$

zu A24) $F(x,y) = \left(x^2 + y^2 - 2x\right)^2 - \left(x^2 + y^2\right) = 0$ Gesucht $f(x) = y$ mit $F(x, f(x) \neq 0$ in einer Umgebung $U(0,1)$

- $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig diff'bar
  $\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = 2\left(x^2 + y^2 - 2x\right)(2x-2) - 2x$
  $\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = 2\left(x^2 + y^2 - 2x\right) \cdot 2y - 2y$
- Der Punkt $(0,1)$liegt auf der Kurve
  $F(0,1) = \left(0^2 + 1^2 - 2 \cdot 0\right)^2 - \left(0^2 + 1^2\right) = 0$
- Die partikuläre Abl $\frac{\partial}{\partial y} F$ in $(0,1)$ verschwindet nicht
  $\frac{\partial}{\partial} F(0,1) = 2 \cdot (1) \cdot 2 - 2 = 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ Satz über Implizite Funktione kann verwendet werden
$\Rightarrow \exists U((0,1))$ von $(0,1)$, sodass sich $F(x,y) = 0$ nach y in $U((0,1))$auflösen lässt

d.h $\exists \delta_o > 0 \qquad \exists f : (\delta_0, \delta_0) \to \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$ und $F(x, f(x)) = 0 \quad f(0) = 1$

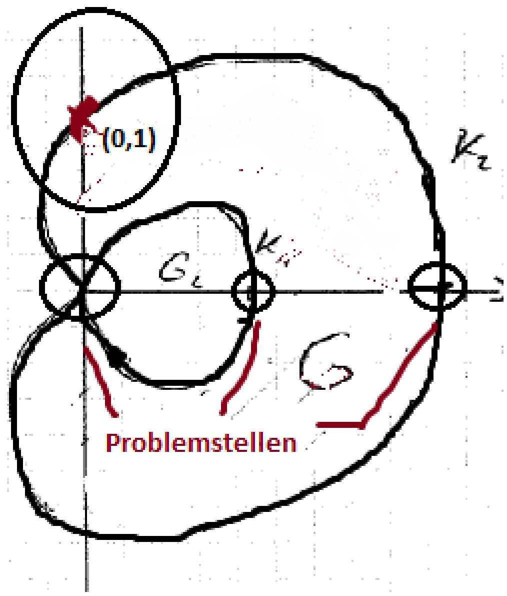
Berechne $f'(0) : F(x, f(x)) = 0 \qquad \forall |x| < \delta_o$

Implizites Differenzieren liefert :

$0 = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, f(x)) \cdot \frac{d}{dx} x + \frac{\partial}{\partial y} F(x, f(x)) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$

$0 = \frac{\partial}{\partial x} F(x, f(x)) + \frac{\partial}{\partial y} F(x, f(x)) \cdot f'(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{\partial}{\partial x} F(x, f(x))}{\frac{\partial}{\partial y} F(x, f(x))} \qquad \Rightarrow f'(0) = \frac{-(-4)}{2} = 2$$



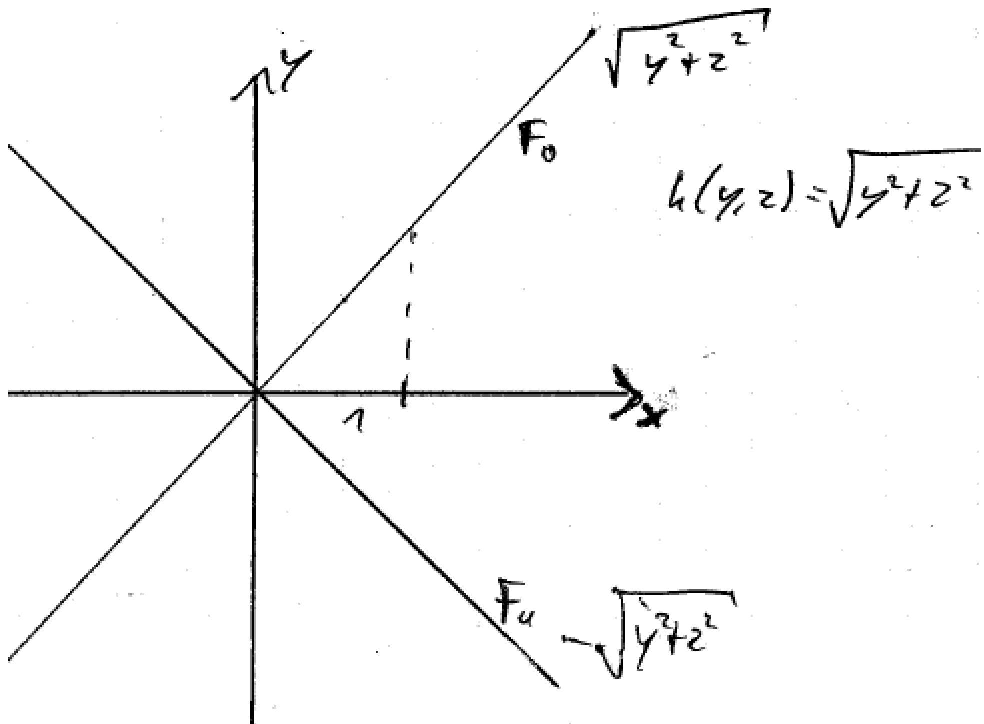
A25) (1) $y^2 + z^2 = x^2$ der im Innern des Zylinders (2) $x^2 + y^2 = 1$ liegt

Aus (1)+(2) folgt $2y^2 + z^2 = 1$

Wir zerlegen (1) in 2 Teile

$$F_O := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 | \, 2y^2 + z^2 < 1 \, ; \, x = \sqrt{y^2 + z^2} =: \, h(y, z) \right\}$$

$$F_U := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 | \, 2y^2 + z^2 < 1 \, ; \, x = -\sqrt{y^2 + z^2} \right\}$$



y-z-Ebene

$$A(F) = A(F_O) + A(F_U)$$

$$A(F_O) = \int\limits_{\{2y^2+z^2<1\}} \sqrt{1+|\nabla h|^2}\, dydz$$

$$A(F_U) = \int\limits_{\{2y^2+z^2<1\}} \sqrt{1+|\nabla - h|^2}\, dydz$$

$$A(F) = A(F_O) + A(F_U) = 2\int\limits_{\{2y^2+z^2<1\}} \sqrt{1+|\nabla h|^2}\, dydz$$

$$\nabla h(y,z) = \left(\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)$$

$$|\nabla h|^2 = \frac{y^2}{y^2+z^2} + \frac{z^2}{y^2+z^2} = 1$$

$$A(F) = 2\int\limits_{\{2y^2+z^2<1\}} \sqrt{2}dydz = 2\sqrt{2}\int\limits_{z=-1}^{1} \int\limits_{y=-\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}} 1dydz$$

$$= 2\sqrt{2}\int\limits_{-1}^{1} 2\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}dz = 4\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-z^2}dz = ... = 2\pi$$

A26) Sei $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2+y^2+z^2=1\}$

P:$[0;2\pi] \times [0;\pi] \longmapsto \mathbb{R}^3 \, : \, (\varphi \, , \, \theta) \mapsto (\sin\varphi \sin\theta \, , \, \cos\varphi \sin\theta \, , \, \cos\theta)$

- $\bar{G} = [0;2\pi] \times [0;\pi]$ besitzt regulären Rand
  $\bar{G}$ ist Rechteck
  $P(\varphi,\theta) = (\sin\varphi\cos\theta)^2 + (\cos\varphi\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$
  $= \underbrace{(\sin^2\varphi\cos^2\varphi)}_{1}\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
  $P: \quad \bar{G} \mapsto S$
- P invertierbar (φ"*Längengrad*" , θ"*Breitengrad*")
  $\Rightarrow$ P ist Parametrisierung von S , d.h
  $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, | \, x = x(\varphi,\theta) \, , y = y(\varphi,\theta) \, , \, z = z(\varphi,\theta) \, , \, (\varphi,\theta) \in \bar{G}\} \left|\dfrac{\partial(x,y)^2}{\partial(\varphi,\theta)}\right|^2 =$
  $$\left(det \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix}\right)^2$$
  $$= \left(\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta + \sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta\right)^2 = \left(\sin\theta\cos\theta\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1}\right)^2$$
  $= \sin^2\theta\cos^2\theta$
  $\left|\dfrac{\partial(x,z)^2}{\partial(\varphi,\theta)}\right|^2 = \cos^2\varphi\sin^4\theta$
  $\left|\dfrac{\partial(y,z)^2}{\partial(\varphi,\theta)}\right|^2 = \sin^2\varphi\sin^4\theta$
- $\left|\dfrac{\partial(x,y)^2}{\partial(\varphi,\theta)}\right|^2 + \left|\dfrac{\partial(x,z)^2}{\partial(\varphi,\theta)}\right|^2 + \left|\dfrac{\partial(y,z)^2}{\partial(\varphi,\theta)}\right|^2 \neq 0$
  $$= \sin^2\theta\cos^2\theta + \left(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1}\right)\sin^4\theta$$
  $$= \sin^2\theta \cdot \left(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}\right) = \sin^2\theta \neq 0 \text{ auf G}$$
  $\Rightarrow$S ist eine Reguläre Fläche da P regul- Parametrisierung von S