Grundgebiete der Elektrotechnik III
Kleingruppenübung WS 09/10 - Musterlösung

Aufgabe 7:
Aufgabenteil a.)

F: Was muss man sich hier überlegen oder was sind hier die Grundgedanken ?
A: Man muss sich hier überlegen wie das Problem am Besten anschaut. Kartesische Koordinaten sind hier nicht sinnvoll, trotzdessen man immer so gerne sagt "bei verschobenen Systemen sind kartesische Koordinaten sinnvoll". Hier hingegen sind Zylinderkoordinaten sinnig. Nun fragt man sich wieso ... Hier macht es Sinn sich selbst mal einen Kreis um q_l am Punkt a mit Radius ρ_1 sich zu zeichnen, dann stellt man schon fest, dass man den Punkt a auch auf die x-Achse legen kann und das an der Länge des Vektors nichts ändert. Desweitern ob der Vektor nun bei a liegt oder bei 0 macht hier fast keinen Unterschied, da man hier lediglich einen Vektor betrachtet und man diese zumindest zu Anschauungszwecken auch verschieben kann.

$\Rightarrow$ **Wie rechnet man die Aufgabe nun ? Was braucht man hierfür.**

1. Das E-Feld: $E = \frac{ql}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot e_\rho$ **Wieso dieses ? Nun man kann die mit l-begrenzte Linienladung auch als unendlich lange Ladung betrachten. Wieso ? Lokale Feldeigenschaften ändern sich nicht solange der Bereich im betrachteten Bereich des Feldes symmetrisch ist. Soll heissen ist das Feld oder die Linienladung im Bereich symmetrisch so ist die Betrachtung als unendliche Linienladung möglich.**

2. Die Potentialformel. Zuerst nehmen wir mal die Grundform her: $\varphi_1 = \varphi_0 - \int_{P_0}^{P_1} \vec{E}\, d\vec{s}$

Nun müssen wir uns überlegen wie P_0 und P_1 zu gestalten sind ... Wie gerade schonmal genannt wurde ist hier eine verschobene und umgelegte Betrachtung möglich. So kann man sich überlegen, dass $P_0 = a$ und $P_1 = \rho_1$ sein.

Somit bilden wir unser Integral mit $\varphi_0 = 0 : \varphi_1 = 0 - \int_a^{\rho_1} \frac{ql}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\vec{e}_\rho\, d\vec{\rho}$ mit $d\vec{\rho} = d\rho\cdot\vec{e}_\rho$. **Hier sieht man sofort $e_\rho\cdot e_\rho = 1$. Somit kann das Ergebnis dieser Rechnung KEIN Vektor sein, sondern ein Skalar !**
Umrechnung ergibt dann:

$$\varphi_1 = -\frac{ql}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\int_a^{\rho_1}\frac{1}{\rho}\,d\rho = -\frac{ql}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\ln\left[\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{a}\right] = -\frac{ql}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{\rho_1}{a}\right) = \frac{ql}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{a}{\rho_1}\right)$$

Aufgabenteil b.)

F: Was muss ich im Bezug auf φ_2 beachten. Kann ich hier genauso rechnen ? Was muss ich beachten ? Wie muss ich das Gesamtpotential behandeln ?
A: Man beachte folgende Rechnung:

1. Das Gesamtpotential ist IMMER: $\varphi_{ges} = \varphi_1 + \varphi_2$. Es ist NICHT: $\varphi_{ges} = \varphi_2 - \varphi_1$ oder irgendwas differentielles... Denn Potentialdifferenzen ergeben IMMER SPANNUNGEN !
Hier gilt wieder die gleiche Anschauung wie ebend. Man sollte sich hier nicht durch -a bei -ql irretieren lassen. Denn wenn man das System relativverschiebt wird aus -a wieder +a. desweiteren kann man sich das +a auch durch Bildung des RAQ Vektors herleiten oder einfach den Betrag des Vektors anschauen. Man kommt grundsätzlich auf ein positives a wogegen das ql immer NEGATIV bleibt, egal wie man es verschiebt.

Führt zu folgender Rechnung: $\varphi_2 = -\frac{-ql}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_a^{\rho_2} \frac{1}{\rho} \, d\rho = \frac{ql}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln\left[\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{a}\right] = \frac{ql}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{a}\right)$

Folgt demnach für $\varphi_{ges} = \frac{ql}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$

Aufgabenteil c.)

F: Ist der Aufgabenteil nicht etwas unschön formuliert !? Wie muss ich das lösen oder überhaupt betrachten ?
A: Man könnte hier sich selbst fragen wenn man liest "Wie groß muss der Abstand 2a der Linienladungen gewählt werden" Meine erste Antwort wäre gewesen "äh, 2a !?" Nunja, aber wenn man etwas genauer schaut fällt einem recht schnell auf das man diese geniale Kreisformel nutzen kann.

Grundformel: $a^2 + R^2 = x_M^2$
Gegeben war: $x_{M,i} = 13\,\rho_0$ und $R_i = 5\,\rho_0$ **sowie als auch** $x_{M,a} = 15\,\rho_0$ und $R_a = 9\,\rho_0$

Einsetzen zeigt dann (ich rechne das nun mal exemplarisch, es kommt bei beiden das selbe Ergebnis raus !): $a = \sqrt{x_M^2 - R^2} = \sqrt{13\,\rho_0 - 5\,\rho_0} = 12$ **umgeformt auf 2 *a* sind es dann:** $2\,a = 24$

Aufgabenteil d.)

F: Wie muss man sich das hier anschauen ? wie kann man das am Besten lösen ?
A: Die Anschauungen sind hier recht verzwickt. Man muss hier die Relativverschiebung des Kreises beachten, dann die Ladungsverschiebung und dann noch die Symmetrien.

Wie geht man in der Rechnung vor !?

1. Man schnappt sich die Formel aus b. Diese war: $\varphi_{ges} = \frac{ql}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$

Nun müssen wir und mit der Formel φ_a und φ_i bilden...

$$\varphi_i = \frac{ql}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{\rho_{2,\,i}}{\rho_{1,\,i}}\right)$$

$$\varphi_a = \frac{ql}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{\rho_{2,\,a}}{\rho_{1,\,a}}\right)$$

Soweit so gut, aber was sind nun die ρ's ?

Für φ_i :

$$\begin{bmatrix} \rho_1 : a - \left(x_{M,\,i} - r_i\right) \\ \rho_2 : a + \left(x_{M,\,i} - r_i\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,\rho_0 \\ 20\,\rho_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{ql}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot ln\left(\frac{20}{4}\right) = \frac{ql}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln(5)$$

Für φ_a :

$$\begin{bmatrix} \rho_1 : a - \left(x_{M,\,a} - r_a\right) \\ \rho_2 : a + \left(x_{M,\,a} - r_a\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\,\rho_0 \\ 18\,\rho_0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{ql}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot ln\left(\frac{18}{6}\right) = \frac{ql}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln(3)$$

$$\boldsymbol{U = \varphi_i - \varphi_a = \frac{ql}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot ln\left(\frac{5}{3}\right)}$$

Die Spannung haben wir nun aber wie kommt man nun auf die Kapazität ? Nunja, man benutzt $C = \frac{Q}{U}$ ... Hier kommt aber direkt das nächste Problem ... U haben wir, aber was ist mit Q ? Ist aber eigentlich auch nicht schwer sich vorzustellen... Man sollte sich fragen was Q denn eigentlich ist. Ist es nicht eigentlich die Ladung im Leiter ... JA ... Wunderbar. ql ist per Definition ein infinitesimal kleines Ladungsstück, genauer Ladung pro Strecke ! Was fehlt uns also noch um Q auszurechnen ? Richtig, eine Strecke ... und oh wunder, diese ist angegeben mit l ! Also ist $Q = ql \cdot l$

$$C_E = \frac{ql \cdot l}{\frac{ql}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$$

Aufgabenteil e.)

F: Wie macht man das denn nun ? Kann ich die Systeme einfach verschieben ?
A: Ja. Erstmal ist hier gemeint, dass ql im Nullpunkt liegt und die Kreise zentrisch mit dem Mittelpunkt ebenso bei Null liegen.

Hier ist leicht angenommen zu sehen, dass $\rho_1 = R_i$ und $\rho_2 = R_a$ ist. Man nimmt also nur fix die Formel aus b her und setzt ein.

$$C_K = \frac{ql \cdot l}{\frac{ql}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{9}{5}\right)}$$

Und fertig !

Gegeben ist die Anordnung zweier paralleler, unendlich langer Linienladungen mit den Ladungsbelägen q_L und $-q_L$:

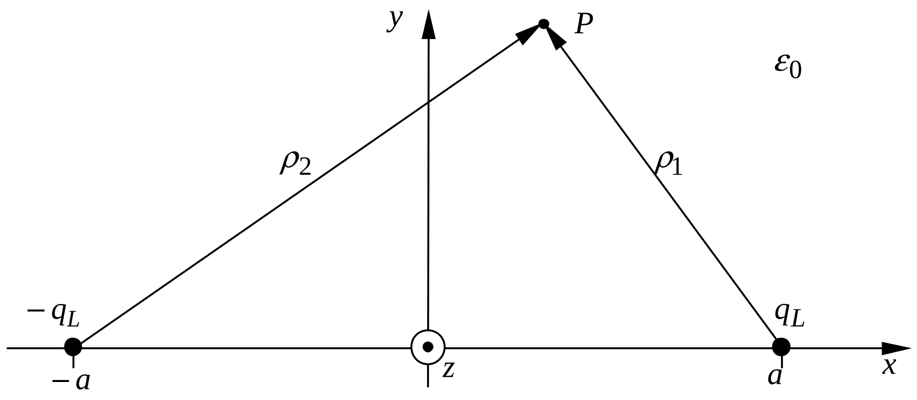

Bild 1

a) Berechnen Sie, ausgehend vom elektrischen Feld, das von der bei $x = a$ platzierten Linienladung q_L verursachte Potential $\varphi_1(\rho_1)$. Die z-Achse soll dabei das Referenzpotential $\varphi_0 = 0$ erhalten.

b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus a) das gesamte Potential der Anordnung aus Bild 1 in Abhängigkeit von ρ_1 und ρ_2.

Die Schnittlinien der Äquipotentialflächen dieser Anordnung mit der x-y-Ebene sind exzentrische Kreise, jeweils mit dem Mittelpunkt $(x = x_\mathrm{M}, y = 0)$ und dem Radius R. Für jeden Kreis ist die Gleichung $a^2 + R^2 = x_\mathrm{M}^2$ erfüllt. Um die Kapazität C_E eines exzentrischen, luftgefüllten Zylinderkondensators der Länge l zu berechnen, wird eine Ersatzanordnung aus zwei Linienladungen betrachtet. Die Kondensatorelektroden liegen auf zwei Äquipotentialflächen der Ersatzanordnung: Für die innere Elektrode gilt $x_\mathrm{M,i} = 13\rho_0$, $R_\mathrm{i} = 5\rho_0$. Für die äußere Elektrode gilt $x_\mathrm{M,a} = 15\rho_0$, $R_\mathrm{a} = 9\rho_0$.

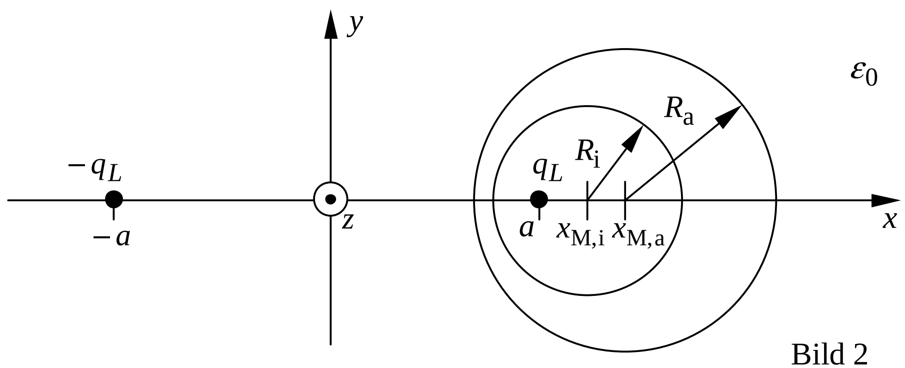

Bild 2

c) Wie groß muss der Abstand $2a$ der Linienladungen gewählt werden?

d) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus den Unterpunkten b) und c) die Spannung $U = \varphi_\mathrm{i} - \varphi_\mathrm{a}$ zwischen den beiden Äquipotentialflächen. Wie groß ist die Kapazität C_E der Anordnung?

e) Wie groß ist die Kapazität C_K, wenn die beiden Elektroden **konzentrisch** angeordnet sind?

HINWEIS für die Unterpunkte d) und e): Streueffekte an den Kondensatorenden sind zu vernachlässigen.