

G beschränkt und einfach zusammenhängend.

$\Gamma = \partial G$ ist reguläre Kurve und durchläuft man Γ im positiven Sinn, dann liegt G zur Linken.

Definiere: $a(x,y) := \frac{8}{3}x^3 - 16xy^2 + e^{y^2}$

$$b(x,y) := -\arctan(x^2 + \sin x) + 6xy^2$$

Dann sind a, b stetig diff'bar auf $\bar{G}$.

Damit sind alle Voraussetzungen für den Satz von Gauss erfüllt und es gilt:

$$\int_{\Gamma} a(x,y) dy - b(x,y) dx = \iint_G \left(\frac{\partial a}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial b}{\partial y}(x,y) \right) dx dy$$

$$\frac{\partial a}{\partial x}(x,y) = 8x^2 - 16y^2, \quad \frac{\partial b}{\partial y}(x,y) = 12xy$$

$$G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < 1, -y < x < y \right\}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_{-y}^y (8x^2 - 16y^2 + 12xy) dx dy = \int_0^1 \left(\frac{8}{3}x^3 - 16xy^2 + 6x^2y \Big|_{-y}^y \right) dy$$

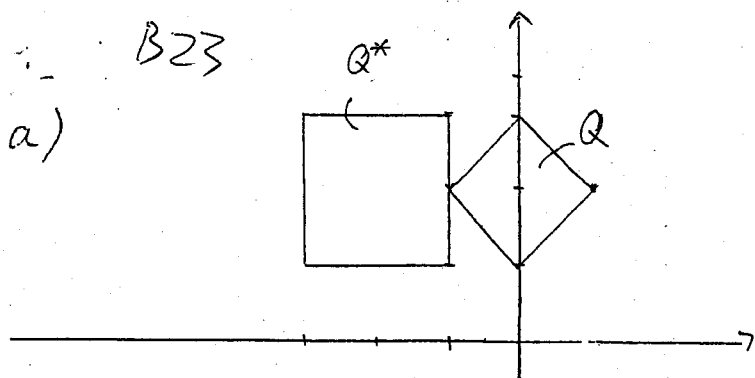
$$= \int_0^1 \left(\frac{8}{3}y^3 - 16y^3 + 6y^3 + \frac{8}{3}y^3 - 16y^3 - 6y^3 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{16}{3}y^3 - 32y^3 \right) dy = -\frac{80}{3} \int_0^1 y^3 dy$$

$$= -\frac{80}{3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{20}{3}$$

B23

a)



$$T: Q \rightarrow Q^*$$

$$T(x, y) := \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}: Q^* \rightarrow Q, (u, v) \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u+v \\ v-u \end{pmatrix}$$

$$\text{denn: } T^{-1}(T(x, y)) = T^{-1} \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-y+x+y \\ x+y-x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T(T^{-1}(u, v)) = T\left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} u+v \\ v-u \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u+v-v+u \\ u+v+v-u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow Q^* = (-3, -1) \times (1, 3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; -3 < x < -1, 1 < y < 3 \right\}$$

$$b) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \Rightarrow \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = 2$$

$\rightarrow$ berechne $\iint_Q \frac{(x-y)^3}{(x+y)^2} dx dy$ mit Transformationsatz:

$\rightarrow$ Def. $f: Q^* \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \frac{u^3}{v^2}$, dann ist f stetig auf $\overline{Q^*}$.

Außerdem: $\partial Q, \partial Q^*$ reguläre Kurven, $T: Q \rightarrow Q^*$ bijektiv

und T, T^{-1} sind C^1 , $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{2}$ ist beschränkt auf Q^*

Damit Transformationsatz anwendbar.

$$\text{Es gilt: } \frac{(x-y)^3}{(x+y)^2} = (f \circ T)(x, y)$$

$$\text{Also: } \iint_Q \frac{(x-y)^3}{(x+y)^2} dx dy = \frac{1}{2} \iint_Q \frac{(x-y)^3}{(x+y)^2} \cdot 2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_Q (f \circ T)(x, y) \cdot |\det DT| dx dy$$

$$\text{Transformations-} \rightarrow = \frac{1}{2} \iint_{Q^*} f(u, v) du dv$$

satz „rückwärts“

$$= \frac{1}{2} \int_{-3}^{-1} \int_1^3 \frac{u^3}{v^2} dv du$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-3}^{-1} u^3 du \cdot \int_1^3 \frac{1}{v^2} dv = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{4} u^4 \right]_{-3}^{-1} \cdot \left[-\frac{1}{v} \right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{81}{4} \right) \left(-\frac{1}{3} + 1 \right)$$

$$\rightarrow = -\frac{20}{3}$$

B24

$$K: (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad x \geq 0$$

in Polarkoordinaten:

$$r^4 = a^2 r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = a^2 r^2 (1 - 2 \sin^2 \varphi)$$

$$= a^2 r^2 \cos(2\varphi), \quad \varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ damit } r \cos \varphi = x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$$

$$\Rightarrow r = a \sqrt{\cos(2\varphi)} \quad (*)$$

Damit ist $\gamma: \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$, mit r durch $(*)$ gegeben,

eine Parametrisierung von $K = \partial G$.

Mit dem Satz von Gauß gilt:

$$\begin{aligned} |G| &= \int_G 1 \, dx dy = \int_G \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \, dx dy \\ &= \int_{\partial G} \frac{1}{2} x dy - \frac{1}{2} y dx \end{aligned}$$

$$\text{hier: } x = r \cos \varphi = a \sqrt{\cos(2\varphi)} \cdot \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} x' &= a \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos(2\varphi)}} \cdot (-\sin(2\varphi)) \cdot 2 \cdot \cos \varphi - a \sqrt{\cos(2\varphi)} \sin \varphi \\ &= \frac{-a \sin(2\varphi) \cos \varphi}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} - a \sqrt{\cos(2\varphi)} \sin \varphi \end{aligned}$$

$$y = r \sin \varphi = a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} y' &= a \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos 2\varphi}} (-\sin(2\varphi)) \cdot 2 \cdot \sin \varphi + a \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \\ &= \frac{-a \sin(2\varphi) \sin \varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} + a \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} |G| &= \int_G 1 dx dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2} (a \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi) \left(\frac{-a \sin(2\varphi) \sin \varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} + a \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} (a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi) \left(\frac{-a \sin(2\varphi) \cos \varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} - a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \right) d\varphi \end{aligned}$$

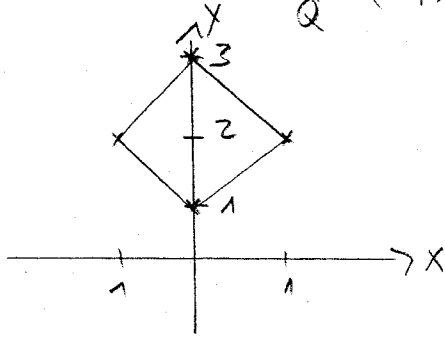
$$\begin{aligned} &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2} (-a^2 \sin(2\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + a^2 \cos(2\varphi) \cos^2 \varphi + a^2 \sin(2\varphi) \cos \varphi \sin \varphi \\ &\quad + a^2 \cos(2\varphi) \sin^2 \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos(2\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{4} (1+1) = \frac{a^2}{2} \quad (2)$$

Alternative zu 323

berechne $\int_Q \frac{(x-y)^3}{(x+y)^2} dx dy$ mit $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y-2| < 1\}$



Idee: Transformiere Q , so dass

$$x-y = u \quad (u,v) \in Q^*$$

$$x+y = v$$

Def. also $T: Q \rightarrow Q^*$ mit

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

(das ist T aus a)) T wird eindeutig auf Q^* abgebildet

Bestimme Q^* . Der Rand ∂Q wird auf ∂Q^* abgebildet:

$$\partial Q: \text{ i) } \{x+y-2=1\} = \{x+y=3\}$$

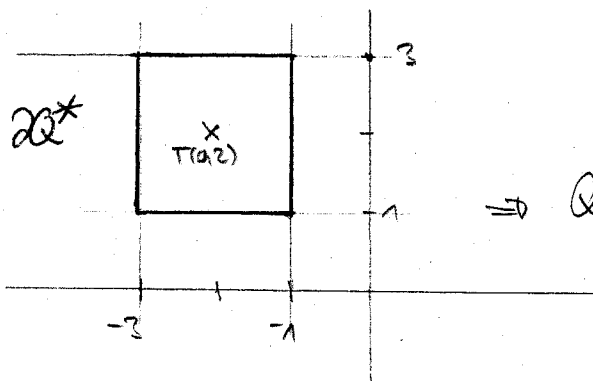
$$\text{ ii) } \{x+2-y=1\} = \{x-y=-1\}$$

$$\text{ iii) } \{-x+y-2=1\} = \{x-y=-3\}$$

$$\text{ iv) } \{-x+2-y=1\} = \{x+y=+1\}$$

$$T(\{x+y=3\}) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 3 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R} \right\}, \quad T(\{x-y=-1\}) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ v \end{pmatrix} \right\}$$

$$T(\{x-y=-3\}) = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ v \end{pmatrix} \right\}, \quad T(\{x+y=1\}) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



auf welcher Seite von ∂Q^* liegt Q^* ?

$$(0,2) \in Q; T(0,2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow Q^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2; -3 < u < -1, 1 < v < 3\}$$

$$\text{und } T^{-1}: Q^* \rightarrow Q, \quad T^{-1}(u,v) = T^{-1}\left(\underbrace{x-y}_{=u}, \underbrace{x+y}_{=v}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = u+y \text{ und so } v = u+2y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(v-u)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(u+v)$$

$$\Rightarrow T^{-1}(u,v) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u+v \\ v-u \end{pmatrix}.$$

Da $\partial Q, \partial Q^*$ regulär sind, $T: Q \rightarrow Q^*$ bijektiv, T, T^{-1} stetig diff'bar und $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \frac{(x+y)^3}{(x+y)^2}$ stetig auf $\overline{Q} \subset \mathbb{H}$, kann man die Transformationsformel anwenden

$$\int_{\substack{Q \\ = T^{-1}(Q^*)}} f(x,y) dx dy = \int_{Q^*} f \circ T^{-1}(u,v) \cdot |\det DT^{-1}(u,v)| du dv \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{berechne } |\det DT^{-1}(u,v)| &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial T_1^{-1}} & \frac{\partial u}{\partial T_2^{-1}} \\ \frac{\partial v}{\partial T_1^{-1}} & \frac{\partial v}{\partial T_2^{-1}} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Außerdem: } f \circ T^{-1}(u,v) &= f\left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)\right) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}(u+v-v+u)\right)^3}{\left(\frac{1}{2}(u+v+v-u)\right)^2} = \frac{u^3}{v^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Damit:}} (*) &= \int_{-3}^{-1} \int_1^3 \frac{u^3}{v^2} \cdot \frac{1}{2} dv du = \int_{-3}^{-1} \frac{u^3}{2} \left[-\frac{1}{v} \right]_1^3 du \\ &= \frac{1}{2} \int_{-3}^{-1} u^3 \frac{2}{3} du = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4} u^4 \right]_{-3}^{-1} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4} - \frac{81}{4} \right] \\ &= -\frac{20}{3}. \end{aligned}$$