Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 06 vom 16. November 2009

Teil A

Aufgabe A19 Mit dem ersten Hauptsatz über Kurvenintegrale beweise man, dass

$$I(\Gamma) = \int_\Gamma 3(x-y)|x-y|\mathrm{d}x + 3(y-x)|y-x|\mathrm{d}y$$

für jede reguläre Kurve Γ im $\mathbb{R}^2$ vom Weg unabhängig ist. Man Berechne $I(\Gamma)$ für

$$\Gamma : \gamma(t) = (\cos(\pi t) + t, t - \sin(2\pi t)), \ 1 \le t \le 4 .$$

Aufgabe A20

(a) Gegeben sei die Abbildung

$$T : \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ T(x^*, y^*) := (x^* - x^*y^*, x^*y^*) = (x, y) .$$

Man berechne die inverse Abbildung T^{-1} und

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(x^*,y^*)}\right| = |\det DT(x^*, y^*)| \ .$$

(b) Es sei G das Gebiet, welches von den Geraden $x + y = 1, x + y = 2, x = 0$ und $y = 0$ begrenzt wird sowie den Punkt $x = \frac{1}{2}, y = 1$ enthält. Man berechne das Bild von G unter der Abbildung T^{-1}.

(c) Man berechne

$$\int_G e^{\frac{y}{x+y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Aufgabe A21 Gegeben sei das Gebiet $G := \left\{(x, y) \middle| x > 0, |y| < x^2 + y^2 < 1\right\}$. Skizzieren Sie G in der x, y-Ebene und berechnen Sie das Integral

$$\int_G \frac{x}{(x^2 + y^2)^2 + 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Aufgabe A22 Es seien α,β reelle Zahlen mit $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Berechnen Sie das Volumen des von den Flächen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z,\; x^2 + y^2 = z^2 \cdot \tan^2 \alpha \text{ und } x^2 + y^2 = z^2 \cdot \tan^2 \beta$$

begrenzten Körpers.

Teil B

Aufgabe B22 Sei Γ die aus den (orientierten!) Strecken

$$\Gamma_1 = \overline{(0,0)(1,1)}, \Gamma_2 = \overline{(1,1)(-1,1)}, \Gamma_3 = \overline{(-1,1)(0,0)}$$

zusammengesetzte Kurve $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$. Mittels des Integralsatzes von Gauß berechne man das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma \left(\frac{8}{3}x^3 - 16xy^2 + e^{y^2}\right) \mathrm{d}y + \left(\arctan\left(x^2 + \sin x\right) - 6xy^2\right) \mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe B23 Gegeben sei das Quadrat $Q = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| + |y - 2| < 1\right\}$.

(a) Durch die Koordinatentransformation

$$T : Q \to Q^* \subset \mathbb{R}^2, (u, v) = T(x, y) := (x - y, x + y), (x, y) \in Q,$$

wird Q eindeutig auf ein Gebiet Q^* abgebildet. Man gebe die Abbildung T^{-1} an und beschreibe Q^* durch geeignete Ungleichungen.

(b) Berechnen Sie $\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \left|\det D\left(T^{-1}\right)(u, v)\right|$ und $\int_Q \frac{(x - y)^3}{(x + y)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, indem Sie mittels der Abbildung T die neuen Koordinaten u, v einführen.

Aufgabe B24 Sei $a > 0$. Mithilfe von Polarkoordinaten berechne man den Flächeninhalt des (ebenen) Gebiets G, welches von der Kurve $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right), (x \geq 0)$ begrenzt wird.

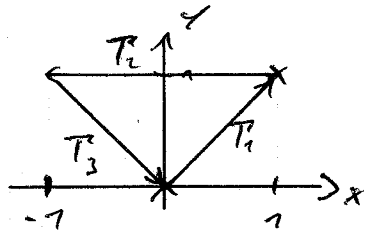
AM3 KGü6

24. NOV. 2009

B22.)

$$\int_{T} \underbrace{\left(\frac{8}{3}x^3 - 16xy^2 + e^{y^2}\right)}_{a(x,y)} dy + \underbrace{\left(\arctan\left(x^2 + \sin(x)\right) - 6xy^2\right)}_{b(x,y)} dx$$

$T = T_1 + T_2 + T_3$



Satz von Gauß 7.3.

Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, das von k geschlossenen regulären Kurven $T_1, \dots, T_k$ mit $\mathring{T}_i \cap \mathring{T}_j = \emptyset$ berandet wird; diese seien so orientiert, dass G jeweils zur Linken liegt, wenn T_i im positiven Sinn durchlaufen wird.

Dann gilt:

$$\iint_G \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{i=1}^{k} \oint_{T_i} a\,dy - b\,dx = \oint_{\partial G} a\,dy - b\,dx$$

$a(x,y)$ und $b(x,y)$ sind stetig diff'bar.

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < y < 1,\ -y < x < y\}$

G ist offen und zusammenhängend.

$T = \partial G$ ist reguläre Kurve und durchläuft man T im positiven Sinn, liegt G zur Linken.

$$a(x,y) := \frac{8}{3}x^3 - 16xy^2 + e^{y^2}$$

$$b(x,y) := -\arctan(x^2 + \sin(x)) + 6xy^2$$

a und b sind stetig diff'bar auf $\overline{G}$

$$\int_\Gamma a(x,y)\,dy - b(x,y)\,dx = \iint_G \left(\frac{\partial a}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial b}{\partial x}(x,y)\right) dx\,dy$$

$$\frac{\partial a}{\partial x}(x,y) = 8x^2 - 16y^2$$

$$\frac{\partial b}{\partial y}(x,y) = 12xy$$

$$\int_0^1 \int_{-y}^{y} 8x^2 - 16y^2 + 12xy \, dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{8}{3}x^3 - 16xy^2 + 6x^2y \Big|_{-y}^{y} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{8}{3}y^3 - 16y^3 + 6y^3 + \frac{8}{3}y^3 - 6y^3 - 16y^3 \, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{16}{3}y^3 - 32y^3 \, dy = -\frac{80}{3}\int_0^1 y^3\,dy$$

$$= -\frac{80}{3} \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{-\frac{20}{3}}}$$

HM3 kGü 6

B 23.)

Transformationssatz für Gebietsintegrale (3.1.)

Vor.: Q und Q^* ebene Gebiete mit ∂Q und ∂Q^* (1) regulär. Es gibt umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen $(x,y)\in Q$ und $(u,v)\in Q^*$

$$T: Q \to Q^*,\quad T(x,y) := \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$(T^{-1}: Q^* \to Q,\quad T^{-1}(u,v) \overset{!}{=} (x,y))$$

(2) ∂Q auf ∂Q^* abbilden, so dass Durchlaufsinn erhalten bleibt.

$$\det\left(D(T^{-1})\right) = \left|\frac{\partial(T_1^{-1}, T_2^{-1})}{\partial(u,v)}\right| = \det\begin{Bmatrix} \frac{\partial T^{-1}}{\partial u} & \frac{\partial T^{-2}}{\partial u} \\ \frac{\partial T^{-1}}{\partial v} & \frac{\partial T^{-2}}{\partial v} \end{Bmatrix} > 0$$

$\forall (u,v) \in \overline{Q^*}$

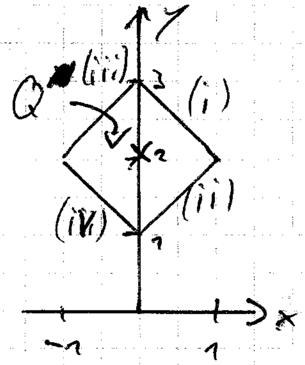
(3) T, T^{-1} stetig diff'bar.

Satz: $f: \overline{Q} \to \mathbb{R}$ auf $\overline{Q}$ stetig (4)

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{Q^*} f\circ T^{-1}(u,v)\cdot\left|\det\left(D(T^{-1})\right)(u,v)\right|\,du\,dv$$

a) $Q = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y-2| < 1\}$

$$T: Q \to Q^*,\quad T(x,y) := (u,v) = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$



Rand von ∂Q wird auf ∂Q^* abgebildet

∂Q: (i) $\{x+y-z=1\} = \{x+y=3\}$

(ii) $\{x-y+z=1\} = \{x-y=-1\}$

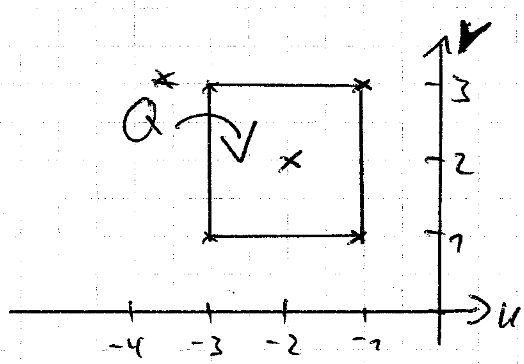
(iii) $\{-x+y-z=1\} = \{x-y=-3\}$

(iv) $\{-x+z-y=1\} = \{x+y=1\}$

$$T(\{x+y=3\}) = \left\{\begin{pmatrix} u \\ 3 \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}\right\}$$

$$T(\{x-y=-1\}) = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ v \end{pmatrix}\right\}, \quad T(\{x-y=-3\}) = \left\{\begin{pmatrix} -3 \\ v \end{pmatrix}\right\},$$

$$T(\{x+y=1\}) = \left\{\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$



$$T(0,2) = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q^* = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 < u < -1, \; 1 < v < 3\}$$

T^{-1} ist gesucht.

$$T^{-1}(u,v) = T^{-1}(x-y, x+y) \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = u + y$ und $v = u + 2y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(v-u)$

$\Rightarrow x = u + \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}(u+v)$

$$\Rightarrow \underline{T^{-1}(u,v) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u+v \\ v-u \end{pmatrix}}$$

b.) ∂Q und ∂Q^* regulär, $T: Q \to Q^*$ bijektiv, T, T^{-1} stetig diff'bar $f: Q \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{(x-y)^3}{(x+y)^2}$ stetig auf $\overline{Q}$.

$\Rightarrow$ Trafo anwendbar.

HM3 KGÜ 6

24. NOV. 2009

$$\int_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_{Q^*} f\circ T^{-1}(u,v)\cdot\left|\det\left(D(T^{-1})\right)(u,v)\right|\,du\,dv \quad (*)$$

$$\left|\det(D(T^{-1}))(u,v)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}$$

$$f\circ T^{-1}(u,v) = f\left(\tfrac{1}{2}(u+v), \tfrac{1}{2}(v-u)\right) > \frac{\left(\frac{1}{2}(u+v-v+u)\right)^3}{\left(\frac{1}{2}(u+v+v-u)\right)^2} = \frac{u^3}{v^2}$$

$$(*)\ \int_{-3}^{-1}\int_{1}^{3} \frac{u^3}{v^2}\frac{1}{2}\,dv\,du = \int_{-3}^{-1} \frac{u^3}{2}\left[-\frac{1}{v}\right]_1^3 du$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{-1} u^3\cdot\frac{2}{3}\,du = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}u^4\right]_{-3}^{-1} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}-\frac{81}{4}\right]$$

$$\underline{\underline{= -\frac{20}{3}}}$$

A24.) ges.: $|G| = \int_G 1\,dx\,dy$ begrenzt durch

Kurve $K: (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

K in Polarkoordinaten: $(x = r\cdot\cos(\varphi),\ y = r\cdot\sin(\varphi))$

$$\left(r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi)\right)^2 = a^2r^2\left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right)$$

$$\Leftrightarrow r^4 = a^2r^2\left(1-2\sin^2(\varphi)\right)$$

$$\Leftrightarrow r^4 = a^2r^2\cos(2\varphi) \Rightarrow \underline{r = a\sqrt{\cos(2\varphi)}} \quad \varphi\in\left(-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right)$$

Parametrisierung: γ von $K = \partial G$

$$\gamma: \left(-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}\right) \to \mathbb{R}^2,\ \varphi \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$|G| = \int_G 1\,dx\,dy = \int_G \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)dx\,dy$$

$$= \int_{\partial G} \tfrac{1}{2}x\,dy - \tfrac{1}{2}y\,dx \quad (*)$$

$$x = r \cdot \cos(\varphi) = a\sqrt{\cos(2\varphi)} \cdot \cos(\varphi)$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = a \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\cos(2\varphi)}} \cdot (-\sin(2\varphi)) \cdot 2 \cdot \cos(\varphi) - a \cdot \sqrt{\cos(2\varphi)} \cdot \sin(\varphi) \right.$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \left(\frac{-a \cdot \sin(2\varphi)\cos(\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} - a\sqrt{\cos(2\varphi)}\, \sin(\varphi) \right)$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{-a \cdot \sin(2\varphi)\sin(\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} + a\sqrt{\cos(2\varphi)}\cos(\varphi)$$

$$(*) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi/4} \frac{1}{2}\left(a\sqrt{\cos(2\varphi)}\cos(\varphi)\right)\left(\frac{-a \cdot \sin(2\varphi)\cos(\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} + a\sqrt{\cos(2\varphi)}\cos(\varphi)\right)$$

$$- \frac{1}{2}\left(a\sqrt{\cos(2\varphi)}\sin(\varphi)\right)\left(\frac{-a\sin(2\varphi)\cos(\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} - a\sqrt{\cos(2\varphi)}\sin(\varphi)\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos^2(2\varphi)\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\underline{\frac{a^2}{2}}}$$

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 07 vom 23. November 2009

Teil A

Aufgabe A23 Gegeben sei die Kurve

$$K := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x^2+y^2-2x)^2 = x^2+y^2\right\}.$$

Die Kurve K besteht aus zwei geschlossenen, doppelpunktfreien Kurven K_1, K_2. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Gebietes G, dass zwischen K_1 und K_2 liegt.

Aufgabe A24 Beweisen Sie, dass sich die Gleichung

$$F(x,y) = (x^2+y^2-2x)^2 - (x^2+y^2) = 0$$

in einer Umgebung $U((0,1))$ nach y auflösen lässt. D.h. es existiert eine Funktion $f = f(x)$, so dass

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \text{in} \quad |x| < \delta_0, \quad \text{für} \quad \delta_0 > 0$$

geeignet. Berechnen Sie ferner $f'(0)$.

Aufgabe A25 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Teils des Doppel-Kegels $y^2 + z^2 = x^2$, der im Inneren des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ liegt.

Aufgabe A26 Es sei

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$$

die Einheitssphäre und

$$p : [0; 2\pi] \times [0; \pi] \to \mathbb{R}^3 : (\varphi, \theta) \mapsto (\sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi \sin\theta, \cos\theta)$$

eine Parametrisierung dieser Fläche. Zeigen Sie, dass es sich damit dabei um eine reguläre Fläche (Parametrisierung) handelt.

Teil B

Aufgabe B25 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = e^x - y^2 .$$

Untersuchen Sie die Auflösbarkeit der Gleichung $f(x, y) = 0$, d.h. bestimmen Sie diejenigen Punkte x_0 bzw. y_0 zu denen eine Umgebung $U(x_0)$ bzw. $U(y_0)$ existiert, so dass in diesen Umgebungen jeweils gilt:

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U(x_0) \quad \text{für eine Funktion} \quad g : U(x_0) \to \mathbb{R}$$

bzw.

$$f(h(y), y) = 0 \quad \forall y \in U(y_0) \quad \text{für eine Funktion} \quad h : U(y_0) \to \mathbb{R}.$$

Aufgabe B26 Gegeben sei die reguläre Fläche

$$\mathcal{F} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in G\right\} .$$

dabei ist $G \subset \mathbb{R}^2$ das Gebiet, dessen positiv orientierter Rand mit der Kurve

$$K : x = \cos^2(t) , \quad y = \sin(t)\cos(t) , \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

zusammenfällt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{F}$.

Aufgabe B27 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Stückes der Fläche $z = 2x^2 - 8xy - 2y^2$, das von dem Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ ausgeschnitten wird.

Aufgabe B28 Es sei

$$Z := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\right\}$$

die Mantelfläche eines Zylinders und

$$p : [0; 2\pi] \times [-1; 1] \to \mathbb{R}^3 : (\varphi, z) \mapsto (\sin\varphi, \cos\varphi, z)$$

eine Parametrisierung dieser Fläche. Zeigen Sie, dass es sich damit dabei um eine reguläre Fläche (Parametrisierung) handelt.