Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 07 vom 23. November 2009

Teil A

Aufgabe A23 Gegeben sei die Kurve

$$K := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x^2+y^2-2x)^2 = x^2+y^2\right\}.$$

Die Kurve K besteht aus zwei geschlossenen, doppelpunktfreien Kurven K_1, K_2. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Gebietes G, dass zwischen K_1 und K_2 liegt.

Aufgabe A24 Beweisen Sie, dass sich die Gleichung

$$F(x,y) = (x^2+y^2-2x)^2 - (x^2+y^2) = 0$$

in einer Umgebung $U((0,1))$ nach y auflösen lässt. D.h. es existiert eine Funktion $f = f(x)$, so dass

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \text{in} \quad |x| < \delta_0, \quad \text{für} \quad \delta_0 > 0$$

geeignet. Berechnen Sie ferner $f'(0)$.

Aufgabe A25 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Teils des Doppel-Kegels $y^2 + z^2 = x^2$, der im Inneren des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ liegt.

Aufgabe A26 Es sei

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$$

die Einheitssphäre und

$$p : [0;2\pi] \times [0;\pi] \to \mathbb{R}^3 : (\varphi,\theta) \mapsto (\sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi\sin\theta, \cos\theta)$$

eine Parametrisierung dieser Fläche. Zeigen Sie, dass es sich damit dabei um eine reguläre Fläche (Parametrisierung) handelt.

Teil B

Aufgabe B25 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = e^x - y^2 .$$

Untersuchen Sie die Auflösbarkeit der Gleichung $f(x,y) = 0$, d.h. bestimmen Sie diejenigen Punkte x_0 bzw. y_0 zu denen eine Umgebung $U(x_0)$ bzw. $U(y_0)$ existiert, so dass in diesen Umgebungen jeweils gilt:

$$f(x,g(x)) = 0 \quad \forall x \in U(x_0) \quad \text{für eine Funktion} \quad g : U(x_0) \to \mathbb{R}$$

bzw.

$$f(h(y),y) = 0 \quad \forall y \in U(y_0) \quad \text{für eine Funktion} \quad h : U(y_0) \to \mathbb{R}.$$

Aufgabe B26 Gegeben sei die reguläre Fläche

$$\mathcal{F} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in G\right\}.$$

dabei ist $G \subset \mathbb{R}^2$ das Gebiet, dessen positiv orientierter Rand mit der Kurve

$$K : x = \cos^2(t), \quad y = \sin(t)\cos(t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

zusammenfällt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{F}$.

Aufgabe B27 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Stückes der Fläche $z = 2x^2 - 8xy - 2y^2$, das von dem Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ ausgeschnitten wird.

Aufgabe B28 Es sei

$$Z := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\right\}$$

die Mantelfläche eines Zylinders und

$$p : [0;2\pi] \times [-1;1] \to \mathbb{R}^3 : (\varphi, z) \mapsto (\sin\varphi, \cos\varphi, z)$$

eine Parametrisierung dieser Fläche. Zeigen Sie, dass es sich damit dabei um eine reguläre Fläche (Parametrisierung) handelt.

HM3 GÜ 7 25. NOV. 2009

A23.) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2-2x)^2 = x^2+y^2\}$

Trafo in Polarkoordinaten:

$x = r\cdot\cos(\varphi) \qquad y = r\cdot\sin(\varphi)$

$r \geq 0 \qquad \varphi \in (-\pi, \pi)$

Funktionaldeterminante: r

$(x^2+y^2-2x)^2 = x^2+y^2 \iff$

$(r^2 - 2r\cos(\varphi))^2 = r^2 \iff$

$r^2(r-2\cos(\varphi))^2 = r^2 \overset{r>0}{\iff}$

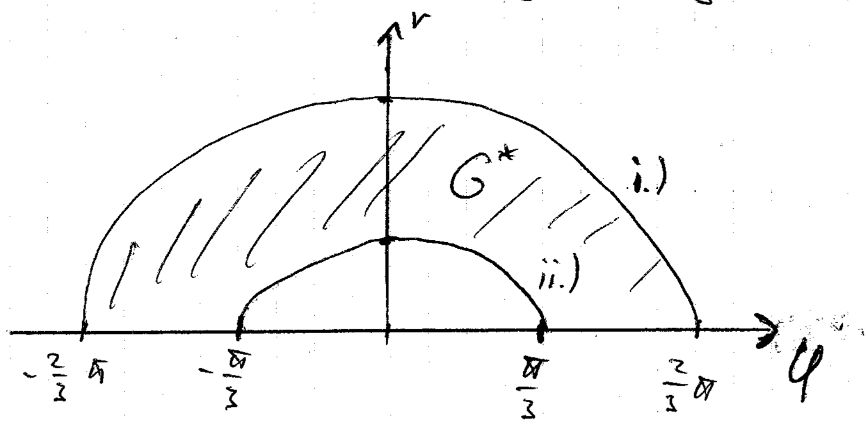
$|r - 2\cos(\varphi)| = 1$

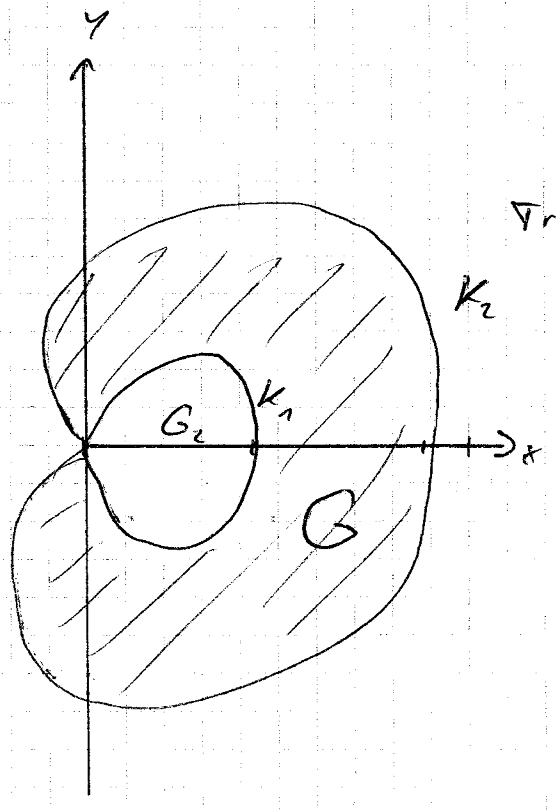
1. Fall: $r - 2\cos(\varphi) > 0 \Rightarrow r = 1 + 2\cos(\varphi) \geq 0$

$\Rightarrow 1 \geq \cos(\varphi) \geq -1/2 \Rightarrow -\frac{2}{3}\pi \leq \varphi \leq \frac{2}{3}\pi$

2. Fall: $r - \cos(\varphi) < 0 \Rightarrow r = -1 + 2\cos(\varphi) \geq 0$

$\Rightarrow 1 \geq \cos \geq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{1}{3}\pi$





Insgesamt: G_1

$A(G) = A(G_1) - A(G_2)$

Trafo:

$G_1 \to G_1^*$

$$A(G_1) = \int_{G_1} 1 \, dx\, dy \overset{\text{Trafo}}{=} \int_{G_1^*} 1 \cdot r \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \int_{r=0}^{1+2\cos(\varphi)} r \, dr \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\varphi=-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} (1+2\cos(\varphi))^2 \, d\varphi$$

$$= \ldots = \underline{\underline{2\pi + 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}}}$$

$$A(G_2) = \ldots = \underline{\underline{\pi - 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}}}$$

$$\underline{\underline{A(G) = \pi + 3\sqrt{3}}}$$

HM3 GÜ 7 25. NOV. 2009

A24.1) $F(x,y) = (x^2+y^2-2x)^2 - (x^2+y^2) = 0$

Implizite Fkt. $G \subset \mathbb{R}^2$, $F: G \to \mathbb{R}$

$F(x,y) = 0$ definiert auf $I \subset \mathbb{R}$ Intervall eine impl. Fkt. falls

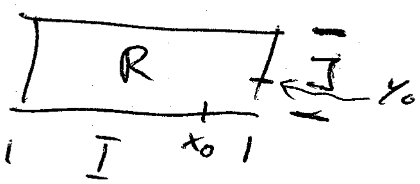
$\forall x \in I \; \exists! \; \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)}}{y} \in \mathbb{R} : F(x, f(x)) = 0$

Satz über implizite Fkt.

$U(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^2$ Umgebung von (x_0, y_0), $F: U(x_0,y_0) \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar mit

$F(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$,

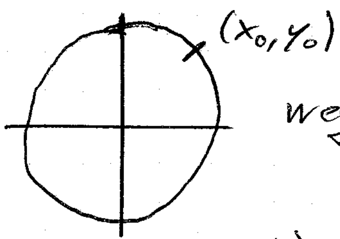
dann ex. ein Rechteck $\bar{R} := \{(x,y) \mid x \in I, y \in J;$ $x_0 \in I$ - Intervall $y \in J$ - Intervall $\}$



sodass $f(x,y) = 0$ nach ~~y~~ auflösbar ist, d.h. $\exists f: I \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar mit $F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in I$.

Bsp. Einheitskreis

$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$



wegen $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x^2}$

zu A24.) $F(x,y) = (x^2+y^2-2x)^2 - (x^2+y^2) = 0$

gesucht $f(x) = y$ mit $F(x, f(x)) = 0$ in einer Umgebung $U((0,1))$

•) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = 2(x^2+y^2-2x)(2x-2) - 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = 2(x^2+y^2-2x)(2y) - 2y \quad ✓$$

•) Der Punkt $(0,1)$ liegt auf der Kurve:

$$F(0,1) = (0^2+1^2-2\cdot 0)^2 - (0^2+1^2) = 0 \quad ✓$$

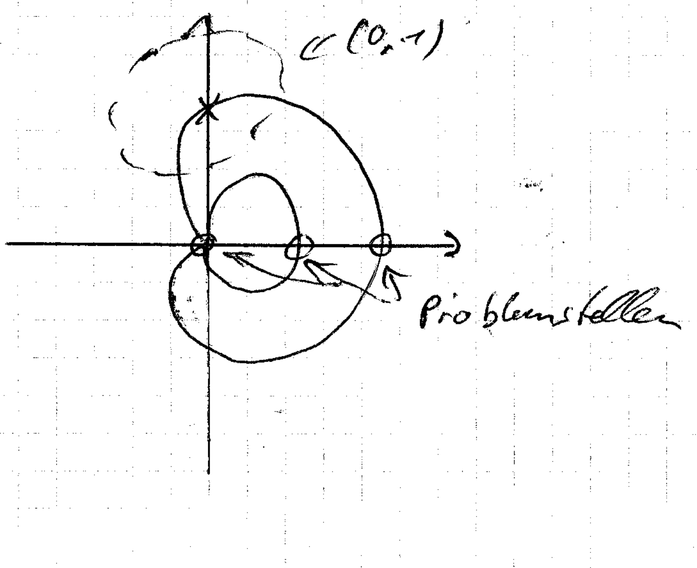
•) Die part. Ableitung $\frac{\partial}{\partial y} F$ in $(0,1)$ verschw. nicht:

$$\frac{\partial}{\partial y} F(0,1) = 2\cdot 2 - 2 = 2 \neq 0 \quad ✓$$

⇒ Können Satz über implizite Fkt. anwenden.

⇒ $\exists\, U((0,1))$ von $(0,1)$, sodass sich $F(x,y)=0$ nach y auflösen lässt, d.h.

$\exists\, \delta_0 > 0\ \exists f: (-\delta_0, \delta_0) \to \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$, und $F(x, f(x)) = 0$ und $f(0) = 1$.



Berechne $f'(0)$: $F(x, f(x)) = 0 \quad \forall |x| < \delta_0$

impl. differenzieren liefert:

$$0 = \frac{d}{dx} F(x, f(x)) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, f(x)) \cdot \frac{d}{dx} x + \frac{\partial}{\partial y} F(x, f(x)) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial}{\partial y} F(x, f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \Rightarrow f'(0) = \frac{-(-4)}{2} = \underline{\underline{2}}$$

A25.)

(1) $y^2 + z^2 = x^2$, der im Inneren vom Zylinder (2) $x^2 + y^2 = 1$ liegt?

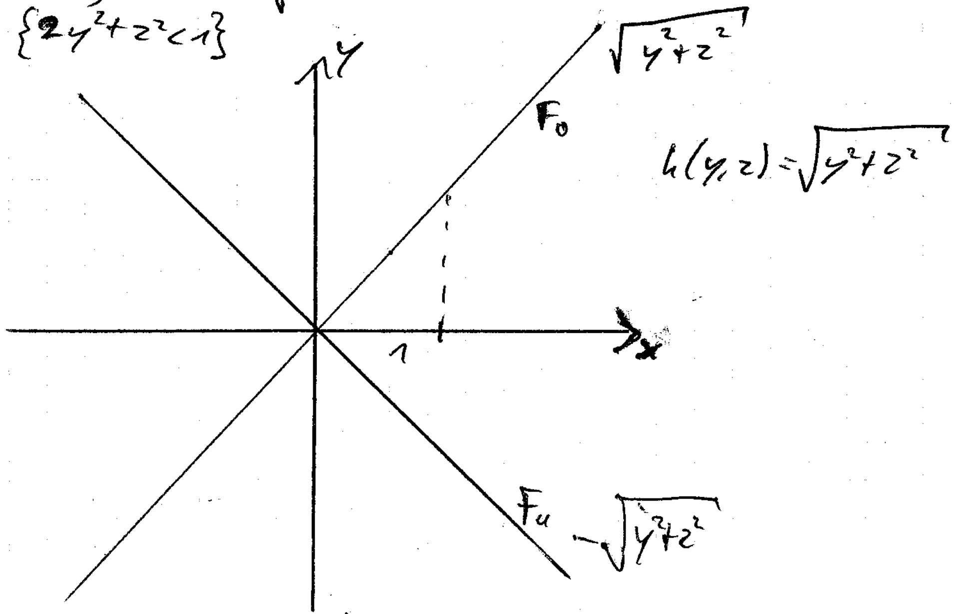
Aus (1) und (2) folgt $2y^2 + z^2 = 1$

Wir zerlegen unsere Fläche (1) in zwei Teile:

$$F_o := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y^2 + z^2 < 1,\ x = \sqrt{y^2+z^2} =: h(y,z)\}$$

$$F_u := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y^2 + z^2 < 1,\ x = -\sqrt{y^2+z^2}\}$$

$$A(F_o) = \int_{\{2y^2+z^2<1\}} \sqrt{1 + |\nabla h|^2}\, dy\, dz$$



y-z-Ebene

$$A(F_u) = \int_{\{2y^2+z^2<1\}} \sqrt{1+|\nabla -h|^2}\, dy\, dz$$

„-" fällt wegen Betrag weg
$\to$ Symmetrie

$$A = A(F_o) + A(F_u) = 2 \int_{\{2y^2+z^2<1\}} \sqrt{1+|\nabla h|^2}\, dy\, dz$$

$$\nabla h(y,z) = \left(\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \right)$$

$$|\nabla h(y,z)|^2 = \frac{y^2}{y^2+z^2} + \frac{z^2}{y^2+z^2} \underline{= 1}$$

$$\Rightarrow A = 2 \cdot \int_{\{2y^2+z^2<1\}} \sqrt{2}\, dy\, dz = 2\sqrt{2} \int_{z=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}} 1\, dy\, dz$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \int_{-1}^{1} 2\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}\, dz = 4 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-z^2}\, dz$$

$$= \ldots = \underline{\underline{2\pi}}$$

<u>A26.)</u> Sei $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$

$P: [0, 2\pi] \times [0; \pi] \to \mathbb{R}^3$:
$(\varphi, \theta) \mapsto (\sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\varphi)\sin(\theta), \cos(\theta))$

•) $\overline{G} = [0; 2\pi] \times [0; \pi]$ besitzt regulären Rand:
$\overline{G}$ ist Rechteck ✓

$$P(\varphi, \theta) \doteq (\sin(\varphi)\cos(\theta))^2 + (\cos(\varphi)\sin(\theta))^2 + (\cos(\theta))^2$$

$$= \underbrace{(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi))}_{=1} \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$$

$$\underline{= 1}$$

$P: \overline{G} \to S$

•) P invertierbar (φ... Längengrad, θ... Breitengrad)

$\Rightarrow$ P ist Parametrisierung von S,

d.h. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x(\varphi,\theta), y = y(\varphi,\theta), z = z(\varphi,\theta), (\varphi,\theta) \in \overline{G}\}$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}\right|^2 = \left(\det\begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta)\end{pmatrix}\right)^2$$

$$= \left(\cos^2(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin^2(\varphi)\sin(\theta)\cos(\theta)\right)^2$$

$$= (\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$$

$$\left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(\varphi,\theta)}\right|^2 = \ldots = \cos^2(\varphi)\sin^4(\theta)$$

$$\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}\right|^2 = \ldots = \sin^2(\varphi)\sin^4(\theta)$$

• $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(x,z)}{\partial(\varphi,\theta)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}\right|^2 \neq 0$:

$$= \sin^2(\theta)\cos^2(\theta) + \underbrace{(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi))}_{=1}\cdot\sin^4(\theta)$$

$$= \sin^2(\theta)\cdot(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)$$

$$= \sin^2(\theta) \neq 0 \text{ auf } G$$

$\Rightarrow$ S eine reguläre Fläche, da P regul. Parametrisierung von S.