Übung zu

Grundgebiete der Elektrotechnik III

WS 09/10 - Blatt 3

Aufgabe 14

Betrachtet werden zwei Punktladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen $\pm Q$ auf der z–Achse im Abstand d symmetrisch zum Ursprung (Bild 1).

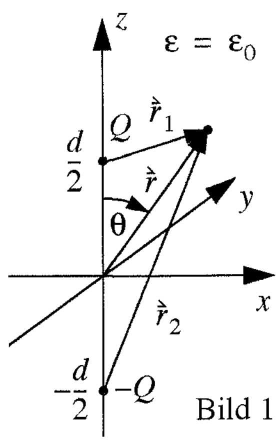


Bild 1

a) Formulieren Sie das elektrostatische Potential φ_e dieser Anordnung in Abhängigkeit von r_1 und r_2.

b) Ermitteln Sie mithilfe des Kosinussatzes $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$ die Abstände r_1 und r_2 und geben Sie deren Kehrwerte als Funktion von $1/r$ und θ an.
Verwenden Sie für die Ausdrücke $1/r_1$ und $1/r_2$ die Näherung

$$\left(1 + \frac{d}{r}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{r} \qquad \left(\text{falls } \frac{d}{r} \ll 1\right).$$

c) Bestimmen Sie das elektrostatische Potential φ_D eines Punktdipols als Grenzwert $d \to 0$ bei konstantem Dipolmoment $p = Q \cdot d$.

d) Geben Sie die Komponenten der elektrischen Feldstärke $\vec{E}_D$ durch Gradientenbildung von φ_D in Kugelkoordinaten an. Was fällt bei der Abhängigkeit von $|\vec{E}_D|$ bzw. φ_D von r auf?

Aufgabe 15

Gegeben ist die zylinderförmige Raumladungsverteilung aus Aufgabe 12 d.

a) Formulieren Sie die Poisson– und Laplace–Gleichung in einem geeigneten Koordinatensystem. Welche Terme entfallen aus Symmetriegründen?

b) Bestimmen Sie das elektrostatische Potential φ_e der Raumladungsvertei lung im Innen- und Außenraum mit dem Ergebnis aus a) durch zweifach Integration. Bestimmen Sie die Integrationskonstanten so, dass $\vec{E}$ und φ überall stetig sind. Wählen Sie $\varphi_e = 0$ auf der z-Achse.

Aufgabe 16

Gesucht ist das elektrostatische Potential φ_e von zwei parallelen, in z–Rich tung unendlich ausgedehnten Linienladungen: q_L schneidet die x-Achse be $x = a$, $-q_L$ bei $x = -a$. Im Koordinatenursprung soll $\varphi_e = 0$ gelten.

a) Formulieren Sie φ_e in Abhängigkeit von ρ_1 und ρ_2, wobei ρ_1 und ρ den jeweiligen Abstand des Aufpunktes von q_L bzw. $-q_L$ beschreiben.

HINWEIS: Das Potential **einer** Linienladung q_L in der z-Achse mit dem Be zugspunkt bei ρ_0 lautet $\varphi_e = -\frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \cdot \ln\frac{\rho}{\rho_0}$.

b) Zeigen Sie, dass für jede Äquipotentialfläche gilt: $\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 = k^2$ m $k = \text{const.}$

c) Formulieren Sie die Bedingung aus b) in kartesischen Koordinaten.

d) Bringen Sie die Gleichung aus c) in die Form $(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$ un bestimmen Sie die Größen x_0 und R in Abhängigkeit von k.

e) Welche geometrische Form haben die Äquipotentialflächen dieser Anord nung?

Aufgabe 17

Betrachtet wird ein Winkelkondensator mit dem Öffnungswinkel α und Kon densatorplatten der Länge a, der Ausdehnung in z–Richtung b und dem Ab stand ρ_0 vom Ursprung (Bild 2). Zwischen den Platten liegt die Spannung U an. Es sollen keine Streueffekte an den Rändern des Kondensators auftreter d. h. im Innenraum gilt $\vec{E} = E_\phi(\rho, \phi) \cdot \vec{e}_\phi$ und im Außenraum gilt $\vec{E} = 0$.

a) Bestimmen Sie $\vec{E}$ und das elektrostatische Potential φ_e in Zylinderkoordinaten im Innenraum des Kondensators.

b) Geben Sie die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ unmittelbar oberhalb der unteren Platte an. Wie groß ist die Ladung Q auf der unteren Platte?

c) Was ergibt sich für die Kapazität C des Kondensators?

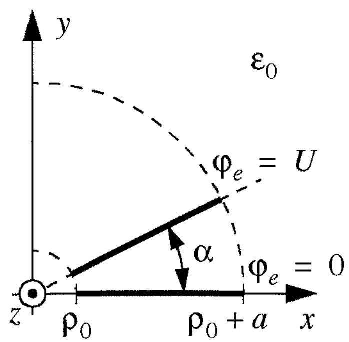


Bild 2

Aufgabe 18

Gegeben sind zwei parallele, in z–Richtung unendlich ausgedehnte Zylinderleiter mit dem Radius R und dem Achsenabstand $2x_0$, mit $x_0 > R$.

a) Für welche Parameter k_1 und k_2 in Abhängigkeit von R und x_0 stimmen die Äquipotentialflächen einer Anordnung aus zwei Linienladungen $\pm q_L$ mit den Oberflächen der Zylinderleiter überein? Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 16.

b) Welche elektrische Spannung U_{12} besteht zwischen den beiden Äquipotentialflächen in Abhängigkeit von q_L? Welche Ladung $\pm\Delta Q$ pro Länge Δl müssen die Zylinderleiter tragen, damit sich im Außenraum der gleiche Feldverlauf ergibt?

c) Wie groß ist der Kapazitätsbelag $C' = \Delta C/\Delta l$ der Anordnung? Verwenden Sie dazu den Ansatz $\Delta C = \Delta Q/U_{12}$.

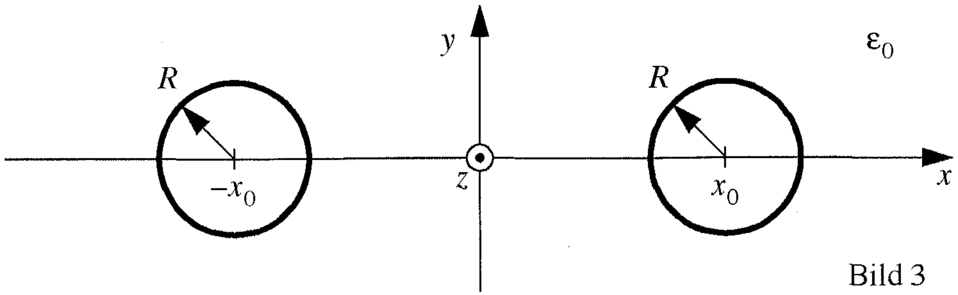


Bild 3

Aufgabe 19

Eine Leiterbahn einer integrierten Schaltung (Bild 4) mit den Abmessungen w=0.4µm, d=0.25µm verläuft im Abstand h=0.25µm über einer leitenden Ebene. Das Isoliermaterial zwischen Leiterbahn und Ebene ist SiO_2 mit $\varepsilon_r \approx 4$.

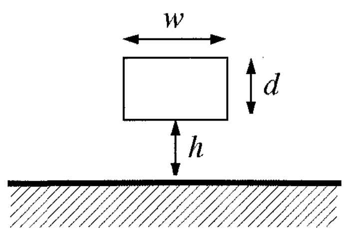


Bild 4

a) Bestimmen Sie den Kapazitätsbelag C' der Anordnung näherungsweise, indem Sie die Bodenfläche und die Seitenflächen des Leiters als Elektroden von Platten- bzw. Winkelkondensatoren zur Ebene betrachten.

Alternativ kann C' durch eine andere Näherung berechnet werden (Bild 5).

b) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis aus Aufgabe 18c den Kapazitätsbelag eines Zylinders mit dem Durchmesser d im Abstand h über einer Ebene.

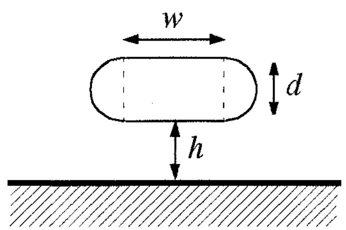


Bild 5

c) Berechnen Sie C', indem Sie die Leiterbahn als Kombination einer plattenförmigen und einer zylinderförmigen Elektrode betrachten.

Aufgabe 20

Die Elektroden eines luftgefüllten Plattenkondensators mit der Fläche A im Abstand d tragen die Ladung $\pm Q$ = const. Streueffekte des elektrischen Feldes sind zu vernachlässigen.

a) Wie groß ist die im Kondensator gespeicherte elektrostatische Energie?

b) Bestimmen Sie die Kraft F zwischen den Platten mit der Methode der virtuellen Verschiebung.

GET3 Gü 8 — 24. NOV. 2009

Fortsetzung Aufg. 13.)

c1.) $\varphi_e(r=a) := 0$

(i) innen: $0 \leq r \leq a$

$$\varphi_e(r) = -\int_{r'=a}^{r} E_r(r')\,dr' = -\frac{Q_{ges}}{4\pi\varepsilon a^3} \underbrace{\int_{r'=a}^{r} r'\,dr'}_{\frac{1}{2}(r^2-a^2)}$$

$$= +\frac{Q_{ges}}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

(ii.) außen: $a<r$

$$\varphi_e(r) = -\int_{r'=a}^{r} E_r(r')\,dr' = -\frac{Q_{ges}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot \overbrace{\int_{r'=a}^{r} \frac{1}{r'^2}\,dr'}^{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)}$$

$$= -\frac{Q_{ges}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{-2a}{-2a} = +\frac{Q_{ges}}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(-2+2\frac{a}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi_e(r) = \frac{Q_{ges}}{8\pi\varepsilon_0 a}\cdot\begin{cases}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) & \text{für } 0\leq r\leq a\\ \left(-2+2\frac{a}{r}\right) & a<r\end{cases}$$

c2.) $\varphi_e(r\to\infty) := 0$

(i) außen $(a<r)$

$$\varphi_e(r) = -\int_{r'=\infty}^{r} E_r(r')\,dr' = -\frac{Q_{ges}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\underbrace{\int_{r'=\infty}^{r}\frac{dr'}{r'^2}}_{\left(0-\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{2a}{2a}}$$

$$= +\frac{Q_{ges}}{8\pi\varepsilon_0 a}\cdot 2\cdot\frac{a}{r}$$

(ii.) innen $(0 \leq a \leq r)$

$$\varphi_e(r) = \underbrace{-\int_{r'=\infty}^{a} E_r(r')\,dr'}_{\varphi_e(r=a)} - \int_{r'=a}^{r} E_r(r')\,dr'$$

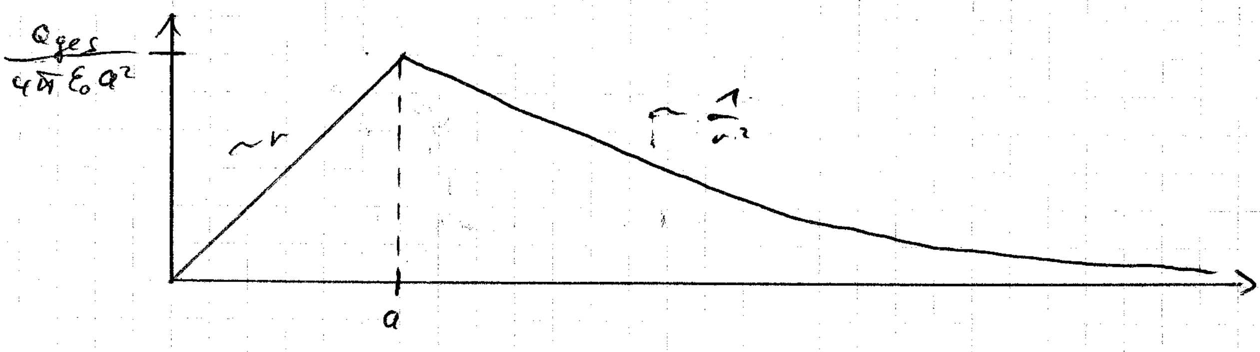
$$\varphi_e(r) = \frac{Q_{ges}}{8\pi\varepsilon_0 a}\cdot 2 - \frac{Q_{ges}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\underbrace{\int_{r'=a}^{r} r'\,dr'}_{\frac{1}{2}(r^2-a^2)}$$

$$= \frac{Q_{ges}}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(2 - \frac{r^2}{a^2} + 1\right)$$

$$\Rightarrow \varphi_e(r) = \frac{Q_{ges}}{8\pi\varepsilon_0 a}\begin{cases}\left(3 - \frac{r^2}{a^2}\right) & \text{für } 0 \leq r \leq a \\ 2\cdot\frac{a}{r} & a \leq r\end{cases}$$

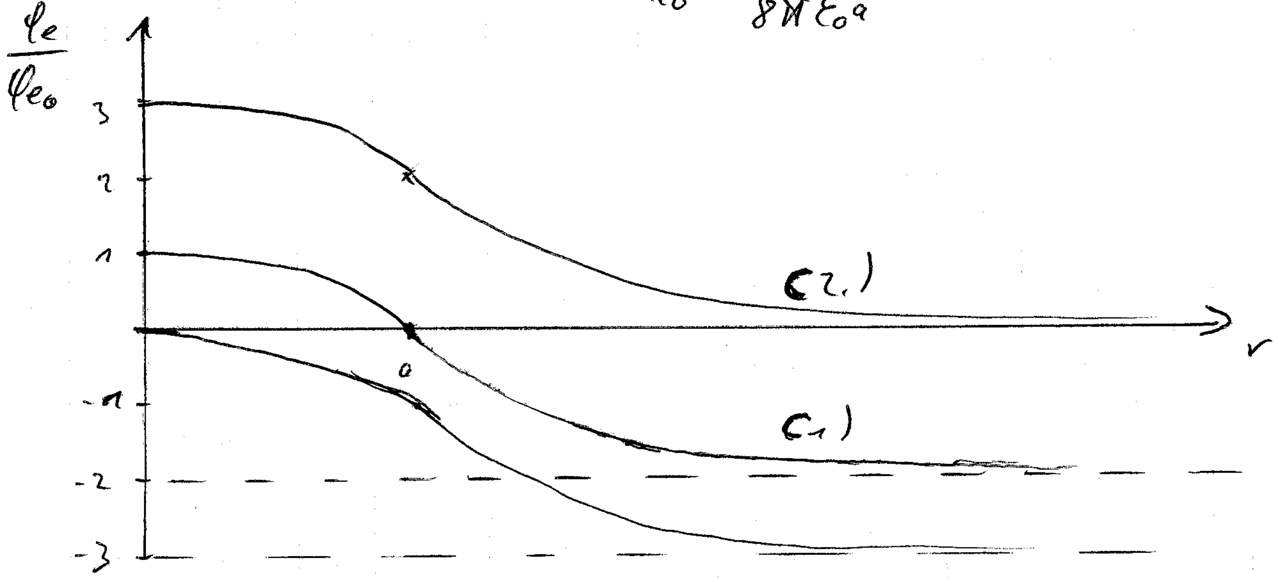
Anmerkung: Die Formulierung von $d\vec{s}$ ist in allen Integralen gleich!
Also $d\vec{s} = dr \cdot \vec{e}_r + \ldots$

d.) $|\vec{E}| = E_r$

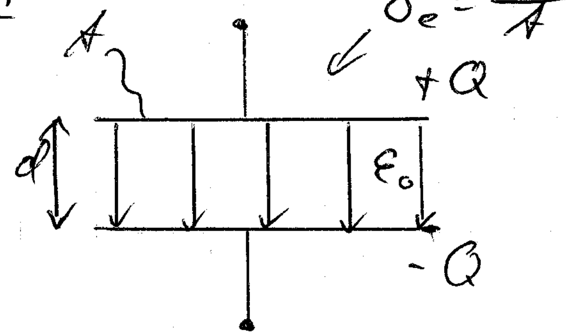


GET3 GÜ 8

$\varphi_{e0} = \frac{Q_{ges}}{8\pi \varepsilon_0 a}$



Aufg. 20.1



a)
$$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d} = \frac{Q}{U} \Rightarrow U = \frac{Q}{C}$$

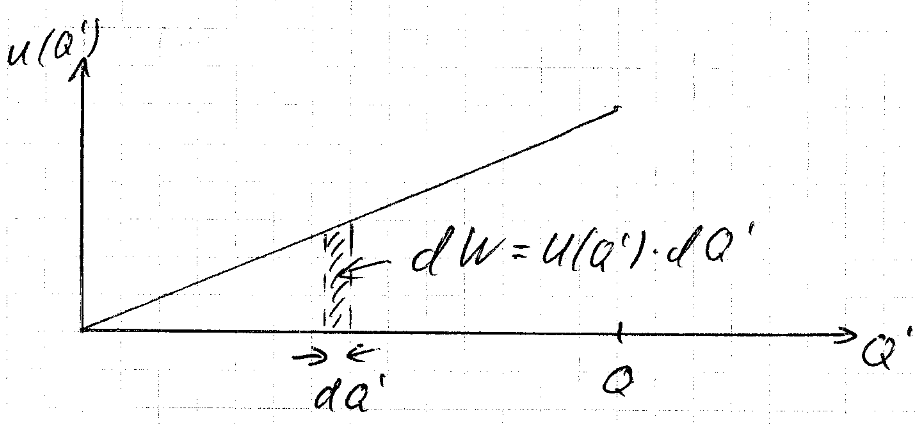
Ansatz: Aufladen des (zunächst ungeladenen) Kondensators bei offenen Klemmen

$$W_{el} = \int_{Q'=0}^{Q} \underbrace{dQ' \cdot U(Q')}_{dW}$$

$$= \frac{1}{C} \cdot \int_{Q'=0}^{Q} Q' \cdot dQ' = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{2} Q^2$$

$$= \frac{d}{2\varepsilon_0 A} Q^2$$

Hier gilt $W_{el} = \frac{1}{2} Q U$ wegen $U \sim Q$



Zweite Betrachtung über die Energiedichte des elektrischen Feldes:

$\sigma_e = \frac{Q}{A}$ auf der positiven Platte

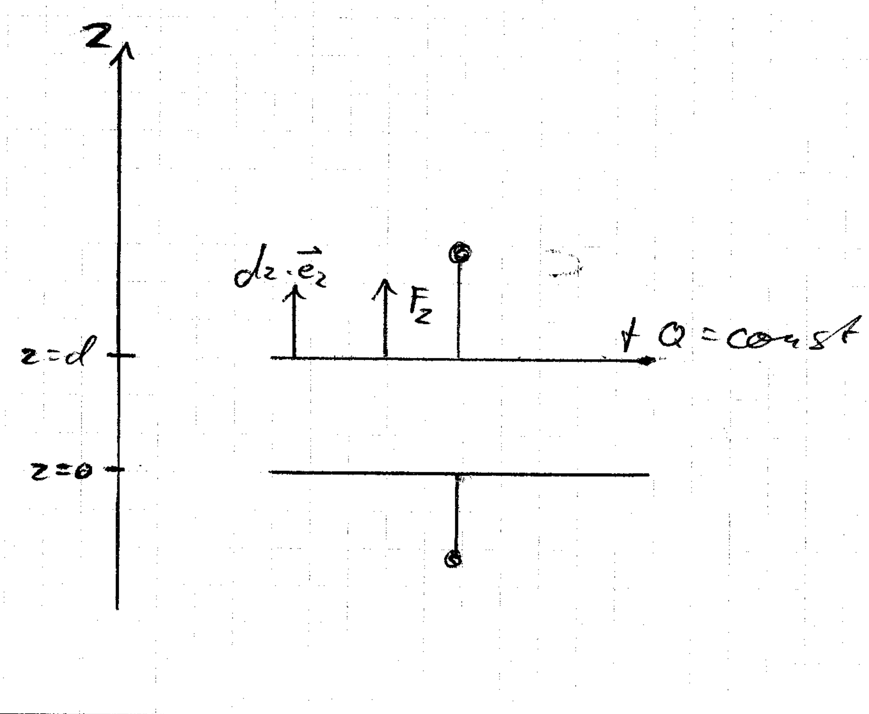
$D = D_n = \sigma_e$, also $D = \frac{Q}{A}$

$w_{el} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{A^2}$ (mit $D = \varepsilon E$, (2.16.3))

$W_{el} = \iiint_V w_{el} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{A^2} \cdot A \cdot d$

b.) Kraftberechnung mit Hilfe der virtuellen Verschiebung

Koordinatensystem und Vektoren $\vec{F}$ und $d\vec{s}$ einzeichnen



$d\vec{s} = dz \cdot \vec{e_z}$

GET3 GÜ 8

24. NOV. 2009

gesucht: Kraft F_z auf die obere Platte bei $z=d$

Bei Verschiebung der oberen Platte um dz verrichtet der Kondensator die Arbeit $dW_{mech} = F_z \cdot dz$

$\Rightarrow$ W_{el} nimmt um W_{mech} ab.

$$dW_{el.} = -F_z \cdot dz \Leftrightarrow F_z = -\frac{dW_{el}}{dz}$$

$$W_{el,nachher} = W_{el,vorher} - \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Kraft aus der Sicht des Systems

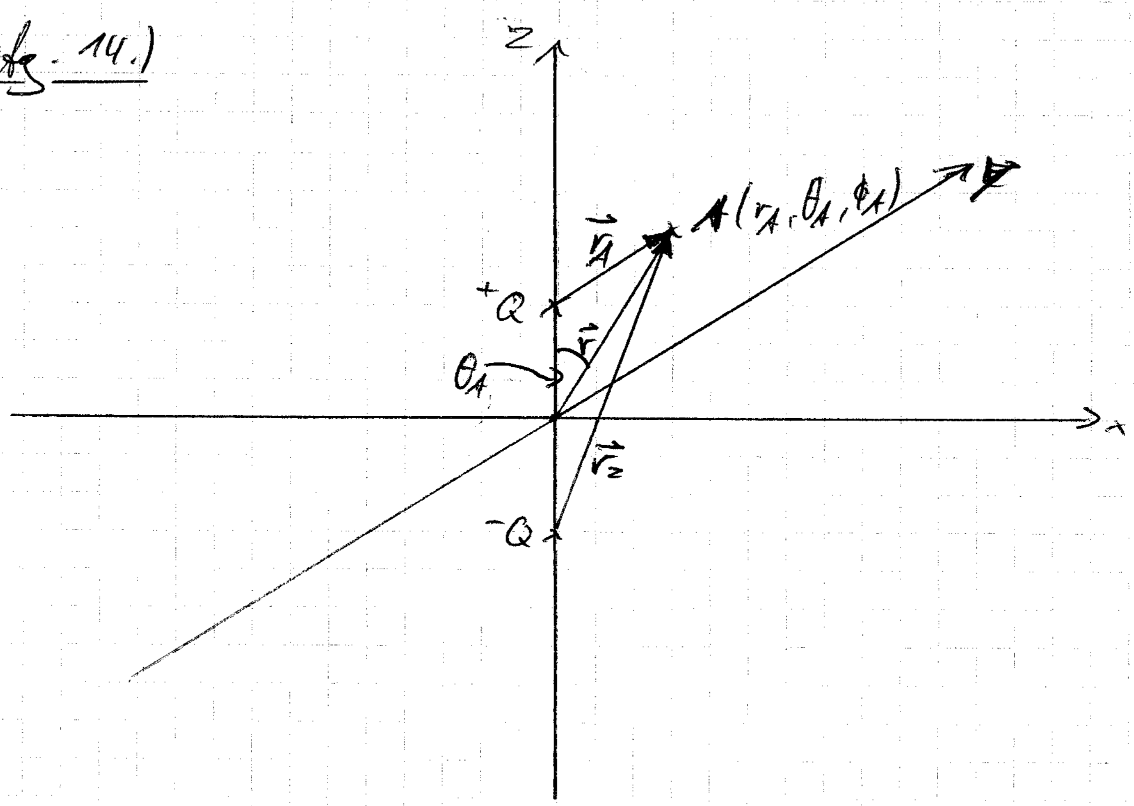
Mit $C(z) = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{z}$ und $W_{el} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C(z)}$

Also $F_z = -\frac{1}{2} Q^2 \underbrace{\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{C(z)}\right)}_{\frac{1}{\varepsilon_0 \cdot A}} = \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 \cdot A}}_{F_z < 0}$

d.h. die Platten ziehen sich an.

Anmerkung: F_z entspr. der Coulombkraft auf die obere Platte im elektr. Feld der unteren Platte. (vgl. Feld einer Flächenladung ~~A~~ 12c.)

Aufg. 14.)



a.)

$r_1 = |\vec{r_1}|$ und $r_2 = |\vec{r_2}|$

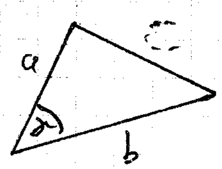
$$\varphi_1(r_1) = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1} + \underbrace{\varphi_{1\infty}}_{\text{Potenzial für } r_1 \to \infty}$$

$$\varphi_2(r_2) = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_2} + \varphi_{2\infty}$$

Setze $\varphi_{1\infty} = 0$ und $\varphi_{2\infty} = 0$

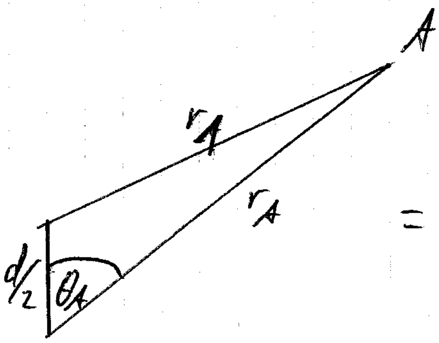
$$\varphi_{ges}(r_1, r_2) = \varphi_1(r_1) + \varphi_2(r_2)$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

b.) Kosinussatz:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

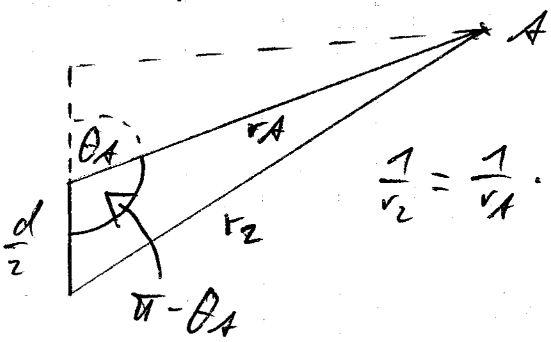
gesucht: r_1, r_2 bzw. $\frac{1}{r_1}$ und $\frac{1}{r_2}$
als Funktion von $\frac{1}{r_A}$ und θ_A



$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + r_A^2 - d \cdot r_A \cdot \cos(\theta_A)}}$$

$$= \frac{1}{r_A} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{d}{r_A}\right)^2 + 1 - \frac{d}{r_A} \cdot \cos(\theta_A)}}$$

entsprechend



$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_A} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cancel{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{d}{r_A}\right)^2} + 1 - \frac{d}{r_A} \cdot \underbrace{\cos(\pi - \theta_A)}_{-\cos(\theta_A)}}}$$

mit Näherung
& weglassen (folgt)

Näherung:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d}{r}}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{d}{r}$$

Zunächst: Terme zweiter Ordnung streichen!
Dann Näherung verwenden
hier: $\frac{d}{r_A} << 1$
also $\left(\frac{d}{r_A}\right)^2 << \frac{d}{r_A}$

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r_A} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{r_A} \cdot \cos(\theta_A)\right)$$

$$\frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r_A} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{r_A} \cdot \cos(\theta_A)\right)$$

c.) $p = Q \cdot d \stackrel{!}{=} \text{const.}$

Hinweis: $\vec{d}$ zeigt von der negativen zur positiven Ladung! (2.16)

$$\varphi(r_A, \theta_A) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_A}\left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{r_A} \cdot \cos(\theta_A) - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{d}{r_A} \cdot \cos(\theta_A)\right)\right]$$

$$= \frac{\overbrace{Q \cdot d}^{p =}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_A^2} \cdot \cos(\theta_A)$$

$$\varphi_D(r_A, \theta_A) = \lim_{\substack{d \to 0 \\ p = \text{const.}}} \varphi(r_A, \theta_A) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\cos(\theta_A)}{r_A^2}$$

Diese Rechnung gilt nur für $\vec{d} = d \cdot \vec{e}_z$

Allgemein: vektorielles Dipolmoment $\vec{p} = Q \cdot \vec{d} \stackrel{\text{hier}}{=} Q \cdot d \cdot \vec{e_z}$

Weiter gilt: $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \cos(\theta)$

$\xrightarrow{\text{hier}}$: $\vec{p} \cdot \vec{e}_r = p \cdot \cos(\theta)$

$$\varphi_D(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3}$$