HöMa3 Übung6 am 18.11.09

Written by Alexander Flisgen.
Fragen oder Verbesserungen an alexander.flisgen@rwth-aachen.de

A19) $I(\Gamma) = \int 3(x-y)|x-y|\,dx + 3(y-x)|y-x|\,dy$

$\Gamma \in \mathbb{R}^2$ zu zeigen gilt $I(\Gamma)$ist wegunabhängig

Zu suchen gilt $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla h = \begin{pmatrix} 3(x-y)|x-y| \\ 3(y-x)|y-x| \end{pmatrix}$.

$\int |x-y|\,dx = \frac{x-y}{2}|x-y| + C$

$\frac{d}{dx}\frac{x-y}{2}|x-y| = \frac{1}{2}(x-y+(x-y)\frac{d}{dx}|x-y|$

Fallunterscheidung

1. Fall $x > y$: $\frac{d}{dx}\frac{x-y}{2}|x-y| = \frac{1}{2}(|x-y| + (x-y)\cdot 1) = |x-y|$
2. Fall $x < y$: $\frac{d}{dx}\frac{x-y}{2}|x-y| = \frac{1}{2}(|x-y| + (x-y)(-1)) = |x-y|$
3. Fall $x = y$: $\frac{d}{dx}\frac{x-y}{2}|x-y|$ läss sich stetig in $x = y$ fortsetzen $\Rightarrow |x-y|$

$$\int (x-y)|x-y|\,dx \overset{Substitution}{=} \frac{(x-y)^2}{2}|x-y| - \int \frac{x-y}{2}|x-y|\,dx$$

Substitution $\begin{cases} u'(x) = |x-y| & u(x) = \frac{x-y}{2}|x-y| \\ v(x) = (x-y) & v'(x) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \int (x-y)|x-y|\,dx = \frac{1}{3}(x-y)^2|x-y|$ (*)

Nun gelte: $\begin{cases} a(x,y) := 3(x-y)|x-y| \\ b(x,y) := 3(y-x)|x-y| \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int a\,dx = 3\int (x-y)|x-y|\,dx & \overset{(*)}{=} (x-y)^2|x-y| \\ \int b\,dx = 3\int (y-x)|x-y|\,dy & \overset{(*)}{=} (y-x)^2|y-x| \end{cases}$$

Nun sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x-y) \to (x-y)^2|x-y|$
ist die gesuchte Potentialfuktion, da sie den entsprechenden Gradienten hat
d.h $I(\Gamma)$ist wegunabhängig.

$\Gamma : \gamma(x) = (\cos(\pi t) + t\,,\ t - \sin(2\pi t))$ für $t \le t \le 4$

Gesucht $I(\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} 3(x-y)|x-y|\,dx + 3(y-x)|y-x|\,dy$

Da eine Sogenannte Potentialfunktion existiert kann

$\Rightarrow I(\Gamma) = h(Q) - h(P)$ bestimmt werden mit $\begin{cases} Q = Endpunkt \\ P = Anfangspunkt \end{cases}$ $von\,\Gamma$

$Q = \gamma\,(4) = (1+4\,,\,4-0) = (5\,,\,4)$
$P = \gamma\,(1) = (-1+1\,,\,1-0) = (0\,,\,1)$
$\Rightarrow I\,(\Gamma) = h\,(5,4) - h\,(0,1) = 1-1 = 0$

A20) $T\ :\ \mathbb{R}\backslash\,\{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $T\,(x^\star, y^\star) = (x^\star - x^\star y^\star\,,\, x^\star y^\star) = (x,y)$

a) Bestimme T^{-1}

Löse $\begin{cases} (1) & x = x^\star - x^\star y^\star \\ (2) & y = x^\star y^\star \end{cases}$ nach $x^\star\,bzw\,y^\star$ auf.

$$\begin{cases} (1)+(2) & x^\star = x+y \quad (3) \\ (3)in(2) & y^\star = \dfrac{y}{x+y} \quad wenn\ x+y = x^\star \neq 0 \end{cases}$$

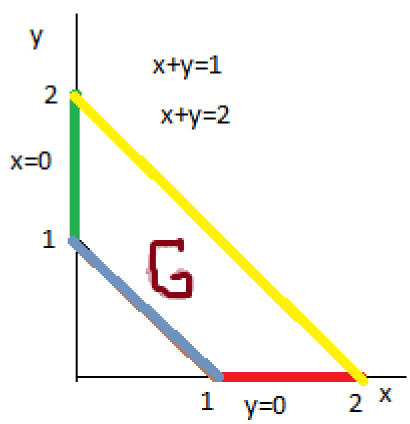
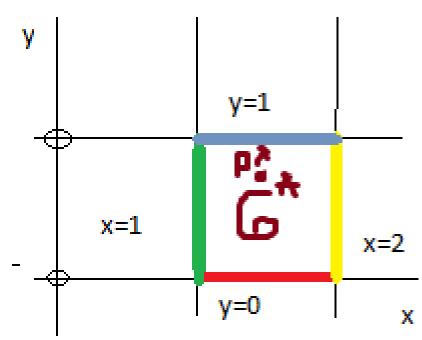
Damit gilt : $T^{-1} : \mathbb{R}^2\backslash\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x = -y\right\} \to \mathbb{R}$

$$T^{-1}(x,y) = \left(x+y\,,\, \frac{y}{x+y}\right)$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial\,(x^\star,y^\star)}\right| = |\det\, DT\,(x^\star,y^\star)| = \left|\det\begin{pmatrix} 1-y^\star & -x^\star \\ y^\star & x^\star \end{pmatrix}\right|$$
$$= |(1-y^\star)\,x^\star + x^\star y^\star| = |x^\star|$$

b) Gegeben sei das Gebiet G , welches begrenzt durch die Geraden $x+y=1\ ,\ x+y=2\ ,\ x=0\ ,\ y=0$ **wird und den Punkt** $P\left(\frac{1}{2}\,,\,1\right)$ **enthält.**

Berechne $G^\star = T^{-1}\,(G)$.

Gebiet G	Transformiertes Gebiet $G^\star$
	

$$\begin{cases} T^{-1}\left(\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x+y=2\right\}\right) & =\left\{\left(2\,,\,\frac{y}{2}\right);\,y\in\mathbb{R}\right\} \\ T^{-1}\left(\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x+y=1\right\}\right) & =\left\{\left(1\,,\,\frac{y}{1}\right);\,y\in\mathbb{R}\right\} \\ T^{-1}\left(\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x=0\,,\,y\neq 0\right\}\right) & =\left\{\left(y\,,\,\frac{y}{y}=1\right);\,y\neq 0\right\} \\ T^{-1}\left(\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x=0\,,\,y\neq 0\right\}\right) & =\left\{(x\,,\,0)\,;\,x\neq 0\right\} \\ T^{-1}(P) & =\left(\frac{3}{2}\,,\,\frac{2}{3}\right)=Q \end{cases}$$

Skizze des Transformierten Gebietes $G^\star$

c) Berechne das Integral $\int\limits_G e^{\frac{y}{y+x}}\,dx\,dy$

$\partial G\,,\,\partial G^\star$seien Reguläre Kurven

$T\,:\,G^\star\to G$ ist bijektiv und stetig diff'bar.

$f(x,y)=e^{\frac{y}{x+y}}\,dx\,dy$ stetig auf $\bar{G}$

$f\left(T\left(x^\star,y^\star\right)\right)=e^{\left(\frac{x^\star y^\star}{x^\star-x^\star y^\star+x^\star y^\star}\right)}=e^{\left(\frac{x^\star y^\star}{x^\star}\right)}=e^{(y^\star)}$

$\Rightarrow$Transformationssatz anwendbar

$\int\limits_G e^{\frac{y}{y+x}}\,dx\,dy=\int\limits_{G^\star}e^{y^\star}x^\star dx^\star dy^\star=\int\limits_{x^\star=1}^{2}\int\limits_{y^\star=0}^{1}e^{y^\star}x^\star dy^\star dx^\star=\int\limits_1^2\left[x^\star e^{y^\star}\right]_0^1 dx^\star=$

$\int\limits_1^2 x^\star\left(e^1-1\right)dx^\star$

$=(e-1)\int\limits_1^2 x^\star dx^\star=(e-1)\,\frac{1}{2}\,(4-1)=\frac{3}{2}\,(e-1)$

A21) Gegeben sei das Gebiet $G:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x>0\,,\,|y|<x^2+y^2<1\right\}$

Bestimme das Integral $\int\limits_G\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^2+1}dxdy$

1. Fall $y>0\,:\,y<x^2+y^2\;\Leftrightarrow\;0<x^2+y^2-y=x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

   $\Leftrightarrow\;\frac{1}{4}<x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$

2. Fall $y<0\,:\,analog$

   $\Leftrightarrow\;\frac{1}{4}<x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2$

G symentrisch bzgl. der x-Achse, der Integrand ist gerade in y

$\Rightarrow \int\limits_G = 2 \cdot \int\limits_{G+}$

$\boxed{\text{NR: } y < x^2 + y^2 < 1 \; \sin\varphi \cdot r < r^2 < 1 \Rightarrow \sin\varphi < r < 1}$

Transformation auf Polarkoordianten :

Funktionaldeterminanten : $r = |\det DT\,(r,\varphi)| = \dfrac{r\cos\varphi}{x^4+1} r\,dr\,d\varphi$

$\int\limits_G \dfrac{x}{(x^2+y^2)^2+1} dxdy = 2 \cdot \int\limits_{T^{-1}(G^+)}$

$T^{-1}\,(G^+) = \left\{(r,\varphi) : 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}\,,\, \sin\varphi < r < 1\right\}$

$\Rightarrow \mathrm{I} = 2 \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{r=\sin\varphi}^{1} \dfrac{r^2\cos\varphi}{r^4+1} d\varphi dr$

$T^{-1}\,(G^+) = \{(r,\varphi)\, 0 < r < 1\,,\, 0 < \varphi < \arcsin r\}$

$\mathrm{I} = 2 \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{\varphi=0}^{\arcsin r} \dfrac{r^2\cos\varphi}{r^4+1} d\varphi dr = 2\int\limits_0^1 \dfrac{r^3}{r^4+1} dr = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \dfrac{4r^3}{r^4+1} dr$

$= \dfrac{1}{2}\left[ln\left(r^4+1\right)\right]_0^1 = \dfrac{1}{2} ln2$

Gebiet G	Transformiertes Gebiet $G^\star$