Gradientenfelder

2D $\quad \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet

$f = \nabla h$; $h : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar

Satz 1: $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ Gebiet: $\underline{F}$ Gradientenfeld $\Leftrightarrow \int_\Gamma \underline{F}\, d\underline{s} = 0 \quad \forall \Gamma \subset \mathcal{G}$ geschlossen

Satz 2: $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ einf. zu. Gebiet: $\underline{F}$ Gradientenfeld $\Leftrightarrow$ rot $\underline{F} = 0$

$\underline{F} = (A, B) \qquad \operatorname{rot} \underline{F} = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}$

"Einfacher Zusammenhang des Gebiets" (keine Löcher) ist wichtig!

Beispiel: Letztes Mal: $\operatorname{div} f = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}$

$$\underline{f} = (a, b)$$

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right); \quad \operatorname{div} \underline{f} = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$$

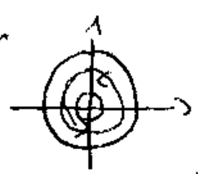
Daraus konstruieren wir ein Vektorfeld, dessen rot verschwindet:

$$\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left(\frac{x}{x^2+y^2} \right)}_{=:B(x,y)} + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\left(\frac{y}{x^2+y^2} \right)}_{=:-A(x,y)} = 0$$

Dann gilt $\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 0$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

D.h. für $\underline{F} = (A, B)$ gilt

$$\operatorname{rot} \underline{F} = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$$

$\mathcal{G} = \Big\{$  $\Big\}$ $\quad$ rot $\underline{F} = 0$ auf $\mathcal{G}$ (nicht einf. zus.!)

ist $\underline{F}$ ein Gradientenfeld auf $\mathcal{G}$?

NEIN! Denn mit Satz 1:

$$\int_{\{x^2+y^2=1\}} \underline{F} \cdot d\underline{x} = \int_0^{2\pi} -\sin t\,(-\sin(t)) + \cos t\,(\cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}\, dt = 2\pi \neq 0 \quad ↯$$

$$\underline{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right); \qquad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$
$$t \in [0, 2\pi]$$

3D Später gilt ähnliches:

$\operatorname{rot} \underline{F} = \operatorname{rot}(A, B, C)$ ist dann ein Vektor!

Satz: $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ konvexes Gebiet

$\underline{F}$ Gradientenfeld $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rot} \underline{F} = 0$

TRANSFORMATIONSFORMEL

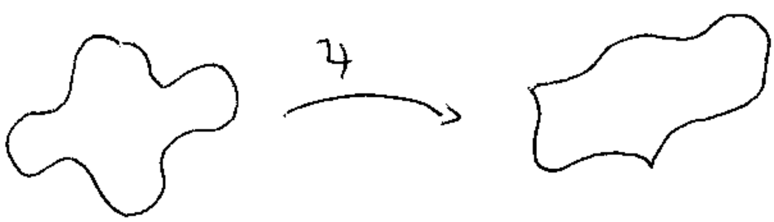
Erweiterung der Substitutionsregel

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau)) \frac{d\varphi}{dt}(\tau)\, d\tau$$

$\varphi : \underbrace{[\alpha, \beta]}_{\mathcal{G}^*} \longrightarrow \underbrace{[a, b]}_{\mathcal{G}}$ diff'bar $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

Falls φ 1:1 sprechen wir auch von einer Transformation

In 2 Dimensionen:

$\mathbb{R}^2$ 

Ψ Transformation:

$\Psi : \overline{\mathcal{G}^*} \longrightarrow \overline{\mathcal{G}}$

eineindeutig

Ψ stetig diff'bar

$(\Psi^{-1}$ —— " —— $)$

$\Psi(s, t) = (\xi(s,t), \eta(s,t))$

Ziel: $\displaystyle\int_{\mathcal{G}} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathcal{G}^*} f(\xi(s,t), \eta(s,t)) \quad \uparrow \quad ds\, dt$

sollte etwas wie die Ableitung sein, wenn mit Subst. Regel verglichen

Die Ableitung von $\Psi(\xi, \eta)$ ist eine 2×2 Matrix

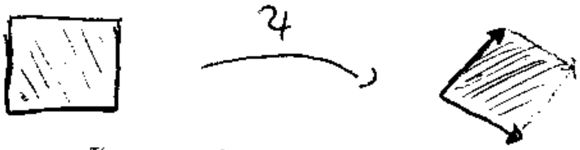
$$\nabla \Psi(s,t) = (\nabla \xi(s,t) \mid \nabla \eta(s,t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{pmatrix} \quad \text{„Funktionalmatrix"}$$

Was hat das überhaupt mit Matrizen zu tun?

Einfachste Transformationen: lineare Transformationen

$\Psi(\underline{v}) = A\underline{v} + \underline{b}$; $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $b \in \mathbb{R}^2$

$\underline{v} = (s, t)$

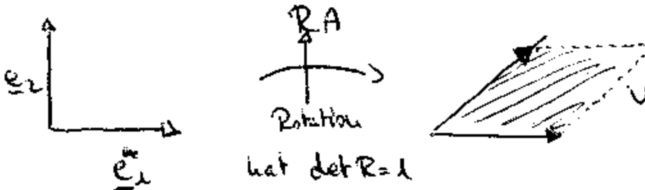


$\mathcal{G}^* = (0,1)^2$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{G} = \psi(\mathcal{G}^*)$

$|\mathcal{G}^*| = 1$ aber was ist $|\mathcal{G}| = |\psi(\mathcal{G}^*)|$

$\underline{b}$ ist Verschiebung und beeinflusst Vol. nicht!

auch Drehungen nicht; daher o. E. $A\,\underline{e}_1 = \lambda\,\underline{e}_1$



hat det R = 1 daher kein Beitrag

$\mathrm{vol}(\,\cdot\,) = (A\cdot\underline{e}_1)\cdot \underline{e}_2(A\,\underline{e}_2)_2$

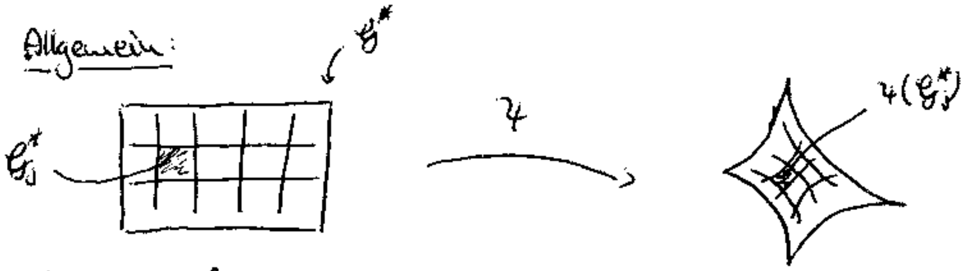
Länge $= a_{11}\cdot a_{22}$

$= \det A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\psi(\underline{v}) = A\underline{v} + b \quad \Longrightarrow \quad |\psi((0,1)^2)| = |\det A|$$

<u>Allgemein:</u>



Lineare Approx.: $\psi(\underline{v}) = \psi(\underline{v}_0) + \nabla\psi(\underline{v}_0)(\underline{v}-\underline{v}_0) + o(\|\underline{v}-\underline{v}_0\|)$

$$= \underbrace{\nabla\psi(\underline{v}_0)\underline{v}}_{=A} + \underbrace{(\psi(\underline{v}_0) - \nabla\psi(\underline{v}_0)\cdot\underline{v}_0)}_{\underline{b}}$$

$$\rightsquigarrow |\psi(\mathcal{G}^*)| = \sum_{j=1}^{N} |\psi(\mathcal{G}_j^*)| = \sum_{j=1}^{N} |\det \nabla\psi(\underline{v}_j)$$

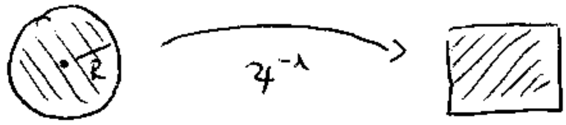
$$\sim \int_{\mathcal{G}} |\det \nabla\psi(s,t)\; dt$$

Wir nennen $\det \nabla\psi(s,t) = \dfrac{\partial(\xi(s,t), \eta(s,t))}{\partial(s,t)}$ „Funktionaldeterminante" oder „Jacobi-Determinante"

$$\boxed{\int_{\mathcal{G}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathcal{G}^*} f(\xi(s,t), \eta(s,t))\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(s,t)}\right| ds\,dt}$$

Wichtigstes Beispiel: Polarkoordinaten

$$G = B_R(0) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2 \right\}$$



G^*

$$\int\limits_{B_R} f(x,y)\, dx\, dy$$

$x = r \cos\varphi$ $\quad$ $r \in [0, R]$

$y = r \sin\varphi$ $\quad$ $\varphi \in [0, 2\pi]$ $\quad \Big\}$ $\quad G^* = \underbrace{(0,R) \times (0, 2\pi)}$

$$\Big\downarrow \Psi(\phi, \eta)$$

$x = \phi(r, \varphi)$

$y = \eta(r, \varphi)$

„Ausnahmemenge"
niederdimensional

KANN IGNORIERT WERDEN!

1. Schritt: Berechne Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Berechne Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\phi, \eta)}{\partial(r, \varphi)} = \cos\varphi\,(r\cos\varphi) - \sin\varphi\,(-r\sin\varphi)$$
$$= r\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) = \underline{\underline{r}}$$

3. Schritt: Transformation

$$\int\limits_{B_R(0)} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r \, d\varphi\, dr$$

z.B. $\quad f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

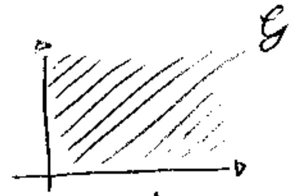
$$\int\limits_{B_R(0)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{r}{\left(r^2\cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)\right)^{1/2}}} \, d\varphi\, dr$$

$$\frac{r}{\left(r^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))\right)^{1/2}} = 1$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi\, dr = 2\pi R$$

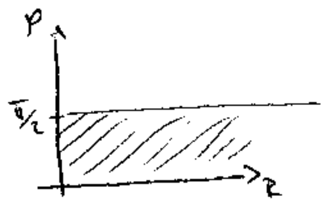
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = ?$$

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$



$$= \int_{\mathcal{G}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

↑ Polarkoordinaten



$x^2+y^2 = r$

$$= \int_0^\infty\int_0^{\pi/2} \underbrace{e^{-r^2} r}_{\frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)}\,d\varphi\,dr$$

$$= \int_0^\infty\int_0^{\pi/2} \frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\,d\varphi\,dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\underbrace{\int_0^\infty \frac{d}{dr}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)dr}_{\underbrace{-\frac{1}{2}\left[e^{-r^2}\right]_0^\infty}_{=1/2}}$$

$$= \pi/4$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$