Gauß in der Ebene

$\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand $\partial\mathcal{G}$, welcher eine reguläre Kurve ist.

$\underline{f}(x,y) = \big(a(x,y), b(x,y)\big)$ stetig diff'bar bis zum Rand

$$\int_{\mathcal{G}} \underbrace{\frac{\partial a}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial b}{\partial y}(x,y)}_{\operatorname{div} \underline{f}(x,y)} \, dx\, dy = \oint_{\partial\mathcal{G}} a\, dy - b\, dx \qquad \text{(Gauß)}$$

$\underline{F}(x,y) = \big(A(x,y), B(x,y)\big)$ stetig diff'bar bis zum Rand

$$\int_{\mathcal{G}} \underbrace{\frac{\partial B}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x,y)}_{\operatorname{rot} \underline{F}(x,y)} \, dx\, dy = \oint_{\partial\mathcal{G}} A\, dx + B\, dy \qquad \text{(Stokes)}$$

2D: rot F ist eine skalare Funktion!
3D: rot $\underline{F}$ ist ein Vektorfeld

Korrespondenz Gauß $\longleftrightarrow$ Stokes in 2D

$a \sim B$
$b \sim -A$

$$F = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = f^{\perp}$$

$$\underline{F} = \nu^{\perp}$$

Gauß in anderer Formulierung:

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} \, dx\, dy = \oint_{\partial\mathcal{G}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \underline{\nu} \, ds \qquad \text{(Gauß)}$$

Bem.:

$\oint_{\partial\mathcal{G}} a(x,y)\, dy$ bzw. $\int_{\Gamma} a(x,y)\, dy = \int_{\alpha}^{\beta} a(\gamma(t))\, \dot\gamma_2(t)\, dt$

$\Gamma = \{\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ stetig diff'bar$\}$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

$$\int_{\Gamma} b(x,y)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} b(\gamma(t))\, \dot\gamma_1(t)\, dt$$

Spezialfall: $\Gamma = \{\underbrace{(x,t)}_{=\gamma(t)};\ t\in[\alpha,\beta]\}$

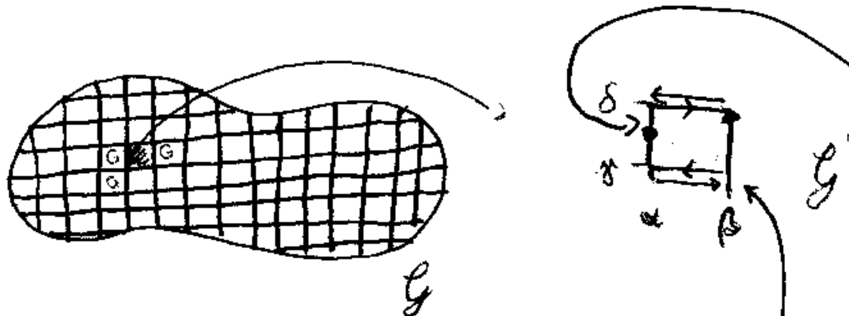
$$\int_\Gamma a(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta a(x,t)\,1\,dt = \int_\alpha^\beta a(x,t)\,dt$$

also „$\int_\alpha^\beta a(x,y)\,dy$"

$$\int_\Gamma b(x,y)\,dx = \int_\alpha^\beta b(x,t)\frac{d}{dt}\gamma_1(t)\,dt$$

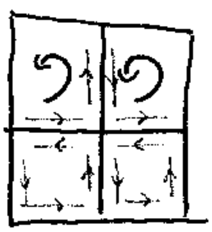
$$= \int_\alpha^\beta b(x,t)\underbrace{\cancel{\frac{d}{dt}}x}_{=0}\,dt \overset{!}{=} 0$$

Beweisidee für Gauß:



$$\int_{G} \frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}\,dx\,dy = \int_G \frac{\partial a}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy + \int_G \frac{\partial b}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \underbrace{\int_\gamma^\delta\int_\alpha^\beta \frac{\partial a}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy} + \int_\gamma^\delta\int_\alpha^\beta \frac{\partial b}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy$$



$$= \int_\gamma^\delta \big(a(\beta,y)-a(\alpha,y)\big)\,dy + \int_\alpha^\beta \big(b(x,\delta)-b(x,\gamma)\big)\,dx$$

$$= \int_\gamma^\delta a(\beta,y)\,dy + \int_\delta^\gamma a(\alpha,y)\,dy$$

$$+ \int_\beta^\alpha -b(x,\delta)\,dx + \int_\alpha^\beta -b(x,\gamma)\,dx$$

[...]

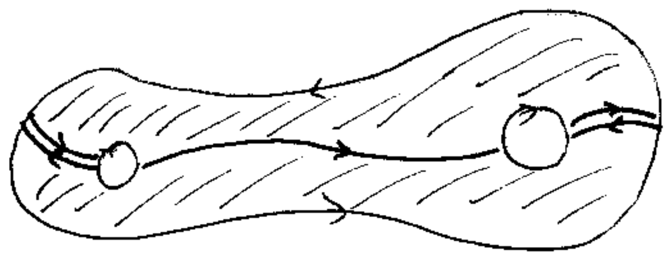
$$= \oint_{\partial \mathcal{G}'} a\,dy - b\,dx$$

Satz: Gauß

$\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ beschr. Gebiet umrandet von regulären Kurven dann gilt:

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\,dx\,dy = \oint_{\partial \mathcal{G}} a\,dy - b\,dx$$

(a,b) stetig diff'bar bis zum Rand



Beispiel: Sei $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, welches die $(0,0) = (x,y)$ nicht enthält (auch nicht der Rand!)

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

berechne

$$\oint_{\partial \mathcal{G}} \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \oint_{\partial \mathcal{G}} \frac{y}{x^2+y^2}\,dx = I$$

Gauß: $I = \int_{\mathcal{G}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) dy\,dx$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,2x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow I = \underline{\underline{0}}$$

$$\nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (\Delta = \operatorname{div} \nabla = \nabla \cdot \nabla)$$

u harmonisch, falls $\Delta u = 0$

z.B. $u(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2})$ harmonisch.

$$\nabla u(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Als Folgerung aus dem Gauß'schen Integralsatz in der Ebene erhalten wir:

<u>Satz:</u> (2. Hauptsatz für Kurvenintegrale)
Sei $\mathcal{G}$ einf. zusammenh., beschr. Gebiet $\partial\mathcal{G}$ reguläre geschlossene Kurve. Sei

$\underline{F}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$ stetig diffbar bis zum Rand.

Dann gilt:

$$\underbrace{\int_\Gamma A\,dx + B\,dy}_{\left(= \int_\Gamma \underline{F} \cdot d\underline{x}\right)} \text{ ist vom Weg unabhängig in } \mathcal{G}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} \quad \left(\text{d.h. } \operatorname{rot} \underline{F} = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 0\right)$$

<u>Beweis:</u> "$\Longrightarrow$" $\int_\Gamma \underline{F}\, d\underline{x}$ unabhängig vom Weg in $\mathcal{G}$

$\Longrightarrow$ 1.HS $\underline{F} = \nabla h$ d.h. $A = \frac{\partial h}{\partial x}$; $B = \frac{\partial h}{\partial y}$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial A}{\partial y} \checkmark$$

"$\Longleftarrow$" $$\int_\Gamma A\,dx + B\,dy = \int_{\partial\mathcal{G}} \underbrace{\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)}_{\doteq 0} dx\,dy = 0$$

geschlossen

$\Gamma = \partial\mathcal{G}$ ist Rand, da $\mathcal{G}$ einfach zusammenhängend

$\Longrightarrow$ vom Weg unabhängig $\square$