

Aufg. 318

$$g: \mathbb{R}; \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x \sin(xt) dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x^2} x \sin(xt) dx + \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} x \sin(xt) dx$$

substituiere: $z = -x$

$$= \int_0^{\infty} dx + \int_0^{\infty} e^{-z^2} z \sin(zt) dz$$

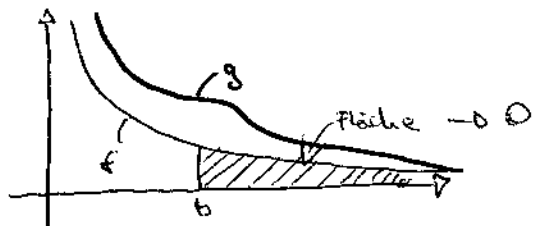
$$= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x \sin(xt) dx$$

$$= 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x^2} x \sin(xt) dx$$

gleichm. konvergent:

zu jedem ε ein b , so dass

$$\left| \int_b^{\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \forall y \text{ wobei } b(y)$$

 $\Rightarrow$ gleichm. konvergent

oder:

$$|f(x, y)| < g(x) \quad \text{und} \quad g(x) \text{ konvergent} \Rightarrow f \text{ gleichm. konvergent}$$

$$f(x, t) = 2e^{-x^2} x \sin(xt) \quad \text{ist stetig im } \mathbb{R}^2$$

$$g(x) = 2e^{-x^2} x \quad \text{ist stetig (z.B. in } [0, \infty))$$

$$\Rightarrow |f(x, t)| = \underbrace{|2e^{-x^2} x|}_{\geq 0} \cdot |\sin(xt)|$$

$$\leq 2e^{-x^2} x = g(x)$$

$$\int_0^{\infty} g(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 2e^{-x^2} x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x^2}]_0^b = 1 \Rightarrow \text{konvergiert}$$

$\Rightarrow G(t)$ nach Satz 6.2. glim. konvergent

Aufg B20

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) := \left(\frac{\alpha x - \beta y}{x^2 + y^2}, \frac{\alpha y + \beta x}{x^2 + y^2} \right)$$

$\rightarrow \gamma$ ist Doppelpunkt frei

$$\rightarrow \gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq \vec{0}$$

$\hookrightarrow \Gamma$ ist reguläre Kurve

außerdem f in Umgebung um Γ stetig

Satz 1.2

$$\int_{\Gamma} f dx = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \overset{\text{Skalarprodukt}}{\gamma'(t)} dt$$

$$f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (-\sin(t)) \frac{\alpha x - \beta y}{x^2 + y^2} + \cos(t) \frac{\alpha y + \beta x}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} &= (-\sin(t)) \frac{\alpha \cdot \cos(t) - \beta \cdot \sin(t)}{\underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{=1}} + \cos(t) \frac{\alpha \sin(t) + \beta \cos(t)}{\underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_{=1}} \\ &= \underbrace{-\alpha \cos t \sin t + \beta \sin^2(t)}_{=0} + \underbrace{\alpha \cos t \sin t + \beta \cos^2(t)}_{=1 \cdot \beta} \\ &= 1 \cdot \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \beta dt = 2\pi \cdot \beta$$

Aufg. B22

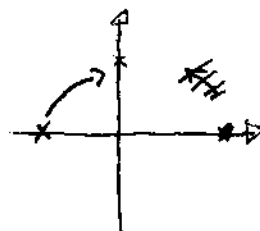
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ 3 \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \sin t dt \\ 3 \cos t dt \end{pmatrix}$$

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



γ ist regulär

$\rightarrow$ injektiv bis auf die Randpunkte
 $\hat{=}$ doppelpunkt frei

$$\rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2(t) + 9 \cos^2(t)} \neq 0 \quad \forall t$$

$$\hat{=} \gamma' \neq \vec{0}$$

a)

$$I(\gamma) = \int_{\gamma} \left(\frac{y}{9x^2 + 4y^2} dx - \frac{x}{9x^2 + 4y^2} dy \right)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{3 \sin(t)}{9 \cdot 4 \cos^2 t + 4 \cdot 9 \sin^2 t} 2 \sin t dt + \frac{2 \cos t}{9 \cdot 4 \cos^2 t + 4 \cdot 9 \sin^2 t} 3 \cos t dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{6 \sin^2(t)}{36} dt + \frac{6 \cos^2 t}{36} dt$$

$$= \frac{6}{36} \int_0^{2\pi} 1 dt = \frac{6}{36} 2\pi = \frac{12}{36} \pi = \frac{1}{3} \pi$$

Unabhängigkeit

$\hookrightarrow$ „konservatives Kraftfeld“



$\Rightarrow$ Wegunabhängigkeit $\Rightarrow \oint \gamma' dy = 0$

b) Nein nicht Wegunabhängig

Aufg. 3.9

$$\int_0^1 \int_0^\infty f(x,y) dy dx \neq \int_0^\infty \int_0^1 f(x,y) dx dy$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) := (2-xy)xy e^{-xy}$$

$$\begin{aligned} \int_0^c \underbrace{(2-xy)}_{\downarrow} \underbrace{xy}_{\uparrow} \underbrace{e^{-xy}}_{\uparrow} dy & \stackrel{\text{2. p. I.}}{=} \dots \\ & = \left[(2-xy)y - \frac{1}{x}(2-2xy) + 2\frac{1}{x} \right] e^{-xy} \Big|_0^c \\ & \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(x,y) dy = 0 \quad \text{für } x \neq 0$$

$$x=0: \int_0^\infty 0 dy = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^\infty f(x,y) dy dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x,y) dx & \stackrel{\text{2. p. I.}}{=} y e^{-y} \\ \int_0^\infty \int_0^1 f(x,y) dx & = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[-c e^{-c} - \underbrace{e^{-c}}_0 - (0-1) \right] = 1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int_0^1 \int_0^\infty f(x,y) dy dx = 0 \neq 1 = \int_0^\infty \int_0^1 f(x,y) dx dy$$

kein Widerspruch zu Satz 6.4. da $\int_0^\infty f(x,y) dy$ nicht gleichm. konvergent

Verneint man die gleichm. Konvergenz:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists b > \delta \quad \exists x \in [0,1]$$

$$\text{mit } \left| \int_b^\infty f(x,y) dy \right| \geq \varepsilon \Rightarrow \text{nicht gleichm. konvergent}$$

Wähle $\varepsilon = \frac{1}{e}$

(i) $\beta \in (0, 1)$ wähle $b = x = 1$

$$\Rightarrow \left| \int_1^{\infty} f(1, y) dy \right| = \left| -e^{-1} \right| = \frac{1}{e} = \varepsilon$$

(ii) $\beta \geq 1$ wähle $0 < x < \min\left\{\frac{1}{2\beta}, \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}}\right\}$ und $b = \frac{1}{2x}$

$$\left| \int_b^{\infty} f(x, y) dy \right| = \left| \frac{1}{4x} e^{-\frac{1}{2}} \right| = \frac{1}{4x} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$> \frac{1}{4 \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e} = \varepsilon$$

$\Rightarrow \int_0^{\infty} f(x, y) dy$ ist nicht glm. konvergent