Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 06 vom 16. November 2009

Teil A

Aufgabe A19 Mit dem ersten Hauptsatz über Kurvenintegrale beweise man, dass

$$I(\Gamma) = \int_\Gamma 3(x-y)|x-y|\mathrm{d}x + 3(y-x)|y-x|\mathrm{d}y$$

für jede reguläre Kurve Γ im $\mathbb{R}^2$ vom Weg unabhängig ist. Man Berechne $I(\Gamma)$ für

$$\Gamma : \gamma(t) = (\cos(\pi t) + t, t - \sin(2\pi t)), \ 1 \leq t \leq 4 .$$

Aufgabe A20

(a) Gegeben sei die Abbildung

$$T : \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ T(x^*, y^*) := (x^* - x^*y^*, x^*y^*) = (x, y) .$$

Man berechne die inverse Abbildung T^{-1} und

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(x^*,y^*)}\right| = |\det DT(x^*, y^*)| \ .$$

(b) Es sei G das Gebiet, welches von den Geraden $x+y=1, x+y=2, x=0$ und $y=0$ begrenzt wird sowie den Punkt $x=\frac{1}{2}, y=1$ enthält. Man berechne das Bild von G unter der Abbildung T^{-1}.

(c) Man berechne

$$\int_G e^{\frac{y}{x+y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Aufgabe A21 Gegeben sei das Gebiet $G := \left\{(x,y) \,\middle|\, x > 0, |y| < x^2 + y^2 < 1\right\}$. Skizzieren Sie G in der x, y-Ebene und berechnen Sie das Integral

$$\int_G \frac{x}{(x^2+y^2)^2+1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Aufgabe A22 Es seien α, β reelle Zahlen mit $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$. Berechnen Sie das Volumen des von den Flächen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z, \; x^2 + y^2 = z^2 \cdot \tan^2 \alpha \text{ und } x^2 + y^2 = z^2 \cdot \tan^2 \beta$$

begrenzten Körpers.

Teil B

Aufgabe B22 Sei Γ die aus den (orientierten!) Strecken

$$\Gamma_1 = \overline{(0,0)(1,1)}, \Gamma_2 = \overline{(1,1)(-1,1)}, \Gamma_3 = \overline{(-1,1)(0,0)}$$

zusammengesetzte Kurve $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$. Mittels des Integralsatzes von Gauß berechne man das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma \left(\frac{8}{3}x^3 - 16xy^2 + e^{y^2}\right) \mathrm{d}y + \left(\arctan\left(x^2 + \sin x\right) - 6xy^2\right) \mathrm{d}x .$$

Aufgabe B23 Gegeben sei das Quadrat $Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| + |y-2| < 1\right\}$.

(a) Durch die Koordinatentransformation

$$T : Q \to Q^* \subset \mathbb{R}^2, (u,v) = T(x,y) := (x-y, x+y), (x,y) \in Q,$$

wird Q eindeutig auf ein Gebiet Q^* abgebildet. Man gebe die Abbildung T^{-1} an und beschreibe Q^* durch geeignete Ungleichungen.

(b) Berechnen Sie $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det D\left(T^{-1}\right)(u,v)\right|$ und $\int_Q \frac{(x-y)^3}{(x+y)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, indem Sie mittels der Abbildung T die neuen Koordinaten u, v einführen.

Aufgabe B24 Sei $a > 0$. Mithilfe von Polarkoordinaten berechne man den Flächeninhalt des (ebenen) Gebiets G, welches von der Kurve $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right), (x \geq 0)$ begrenzt wird.

HM3 GÜ 6

A19.) $I(T) = \int_T 3\cdot(x-y)\cdot|x-y|\,dx + 3(y-\cancel{x})|y-x|\,dy$

$T \subset \mathbb{R}^2$ zu zeigen: $I(T)$ ist wegunabh.
suchen $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla h = \begin{pmatrix} 3(x-y)|x-y| \\ 3(y-x)|y-x| \end{pmatrix}$

$\int |x-\cancel{y}|\,dx = \frac{x-y}{2}|x-y| + C$

$\frac{d}{dx}\frac{x-y}{2}\cdot|x-y| = \frac{1}{2}\left(|x-y| + (x-y)\cdot\frac{d}{dx}|x-y|\right)$

Fallunterscheidung

1. $x > y$: $\frac{d}{dx}\frac{x-y}{2}\cdot|x-y| = \frac{1}{2}(|x-y| + (x-y)\cdot 1)$
$= |x-y|$

2. $x < y$: – " – $= \frac{1}{2}(|x-y| + (x-y)\cdot(-1))$
$= |x-y|$

Ableitung ~~[illegible]~~

$\frac{d}{dx}\left(|x-y|\frac{x-y}{2}\right)$ lässt sich stetig in $x=y$ fortsetzen:
$|x-\cancel{y}|$

$\int (\cancel{x}-\cancel{y})|x-y|\,dx$

$u'(x) = |x-y|$ $\quad u(x) = \frac{x-y}{2}\cdot|x-y|$

$v(x) = (x-y)$ $\quad v'(\cancel{x}) = 1$

$= \frac{(x-y)^2}{2}|x-y| - \frac{1}{2}\int(x-y)|x-y|\,dx \quad \Big| + \frac{1}{2}\int\ldots$

$\Rightarrow \int (x-y)|x-y|\,dx = \frac{1}{3}(x-y)^2\cdot|x-\cancel{y}| \qquad (\ast)$

$a(x,y) := 3(x-y)|x-y| \qquad b(x,y) := 3(y-x)|y-x|$

$\int a\, dx \overset{\wedge}{=} 3 \cdot \int (x-y)|x-y|\, dx \overset{(*)}{=} (x-y)^2 \cdot |x-y|$

$\int b\, dy \overset{(*)}{=} \quad \dots \quad = (y-x)^2 \cdot |y-x|$

$\Rightarrow h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto (x-y)^2 |x-y|$ ist

die gesuchte (Potenzial-) Funktion, d.h. I ist

vom Weg unabh.

$T: \gamma(t) = (\cos(\pi t) + t,\ t - \sin(\pi t)),\ 1 \le t \le 4$

gesucht: $I(T) = \int_T 3 \cdot (x-y)|x-y|\, dx + 3(y-x)|y-x|\, dy$

$\Rightarrow I(T) = h(Q) - h(P)$ mit Q Endpunkt,

P Anfangspunkt von T

$Q = \gamma(4) = (1+4,\ 4-0) = (5,4)$

$P = \gamma(1) = (-1+1,\ 1-0) = (0,1)$

$\Rightarrow I(T) = h(5,4) - h(0,1) = 1 - 1 = \underline{\underline{0}}.$

<u>A20.)</u> $T: \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$T(x^*, y^*) = (x^* - x^* y^*,\ x^* y^*) = (x,y)$

Bestimme T^{-1},

lösen (1) $x = x^* - x^* y^*$

(2) $y = x^* y^*$ nach x^*, y^* auf:

$(1)+(2):\ x^* = x + y \quad (3)$

(3) in $(2) \Rightarrow \quad y = (x+y) \cdot y^*$

$\Rightarrow$ wegen $x+y=x^* \neq 0$ gilt

$$y^* = \frac{y}{x+y}$$

Damit gilt: $T^{-1}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x=-y\} \to \mathbb{R}^2$:

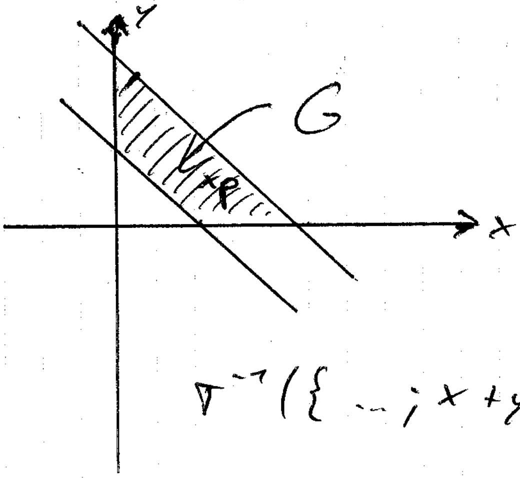
$$T^{-1}(x,y) = \left(x+y,\ \frac{y}{x+y}\right)$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(x^*,y^*)}\right| = \left|\det DT(x^*,y^*)\right| = \left|\det\begin{pmatrix}1-y^* & -x^* \\ y^* & x^*\end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|(1-y^*)\cdot x^* + x^* y^*\right| = |x^*|$$

b.) G: Gebiet begrenzt durch Geraden $x+y=1$, $x+y=2$, $x=0$, $y=0$ und enthält $P=(\frac{1}{2},1)$

Berechne $G^* = T^{-1}(G)$



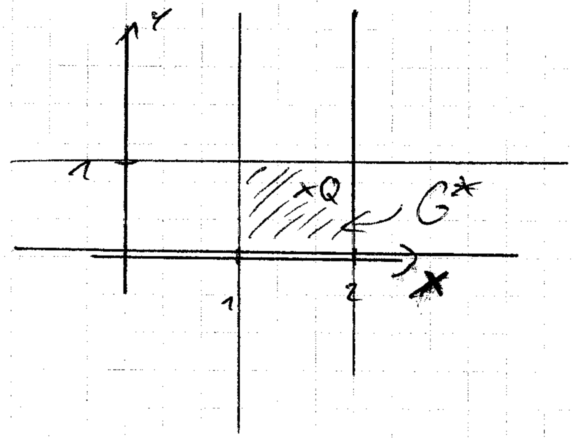
Ränder gehen auf Ränder (T^{-1} stetig)

$T^{-1}(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x+y=2\})$
$= \{(2;\frac{y}{2});\ y\in\mathbb{R}\}$

$T^{-1}(\{\dots;\ x+y=1\}) = \{(1;\frac{y}{1});\ \dots\}$

$T^{-1}(\{x=0;\ y\neq 0\}) = \{(y;1);\ y\neq 0\}$

$T^{-1}(\{y=0;\ x\neq 0\}) = \{(x,0);\ x\neq 0\}$



$T^{-1}(P) = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right) = Q$

$$\int_G e^{\frac{y}{x+y}}\, dx\, dy$$

$\partial G, \partial G^*$ sind reguläre Kurven,
$T: G^* \to G$ ist bijektiv, stetig diff'bar
und ihre Umkehrung auch
$f(x,y) = e^{\frac{y}{x+y}}$ stetig auf $\overline{G}$
$f(T(x^*, y^*)) = e^{\left(\frac{x^* y^*}{x^* - x^* y^* + x^* y^*}\right)} = e^{y^*}$

$\Rightarrow$ Transformationssatz:

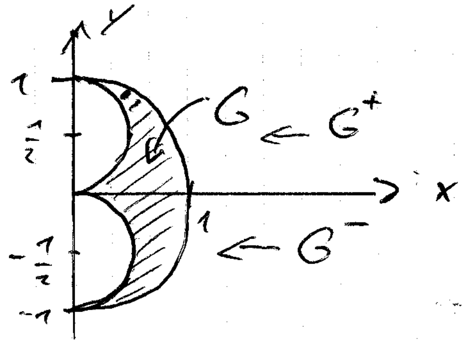
$$\int_G e^{\frac{y}{x+y}}\, dx\, dy = \int_{G^*} e^{y^*}\, x^*\, dx^*\, dy^*$$

$$= \int_{x^*=1}^{2} \int_{y^*=0}^{1} e^{y^*} \cdot x^*\, dy^*\, dx^* = \ldots = \underline{\underline{\frac{3}{2}(e-1)}}$$

AM3 GÜ 6 18. NOV. 2009

A21.) $G := \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x>0, |y|<x^2+y^2<1$

$$\int_G \frac{y}{(x^2+y^2)^2+1}\,dx\,dy$$



1. $y>0 : y< x^2+y^2$

$\Leftrightarrow 0< x^2+y^2-y$

$= x^2(y-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}< x^2+(y-\frac{1}{2})^2$

2. $y<0$: analog

$\frac{1}{4}<x^2+(y+\frac{1}{2})^2$

G symmetrisch bezgl. x-Achse,
Integrand ist gerade in y

$$\Rightarrow \int_G = 2\cdot\int_{G^+}$$

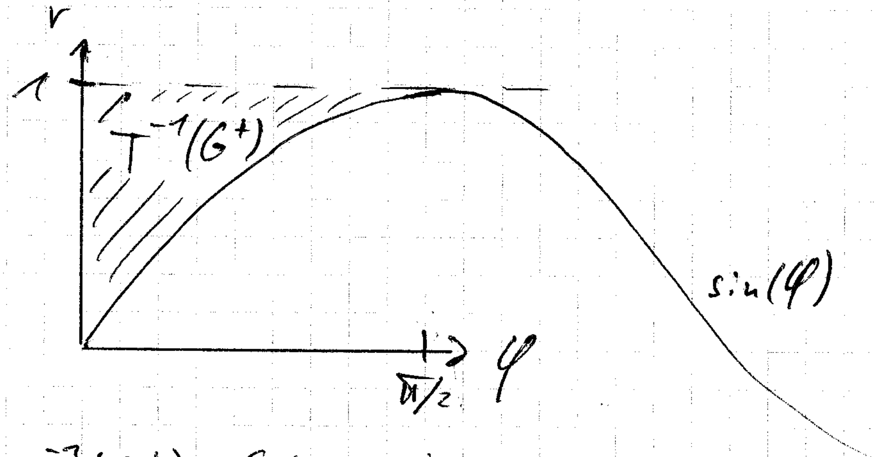
Trafo auf Polarkoordinaten: T
Funktionaldeterminante: $r=|\det DT(r,\varphi)|$

$$I:= \int_G \frac{x}{(x^2+y^2)^2+1}\,dx\,dy = 2\int_{T^{-1}(G^+)} \frac{r\cdot\cos(\varphi)}{r^4+1}\, r\,dr\,d\varphi$$

$\boxed{\begin{array}{l} NR: y<x^2+y^2<1 \\ \Rightarrow \sin(\varphi)\cdot r<r^2<1 \\ \Rightarrow \sin(\varphi)<r<1 \end{array}}$

$$T^{-1}(G^+) = \{(r,\varphi): 0<\varphi<\frac{\pi}{2}, \sin(\varphi)<r<1\}$$

$$\Rightarrow I = 2\cdot\int_0^{\pi/2}\int_{\sin(\varphi)}^{1} \frac{r^2\cos(\varphi)}{r^4+1}\,dr\,d\varphi$$



$$T^{-1}(G^+) = \{(r,\varphi) \mid 0 < r < 1,\ 0 < \varphi < \arcsin(r)\}$$

$$I = 2 \cdot \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{\arcsin(r)} \frac{r^2 \cos(\varphi)}{r^4+1}\, d\varphi\, dr$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \frac{r^3}{r^4+1}\, dr = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{4r^3}{r^4+1}\, dr$$

$$= \frac{1}{2} \ln(|r^4+1|)\Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\log(2)}}$$