Thema 3: Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1:

Entnahme in t=0

a) gegeben: $\kappa = 502{,}82$; gesucht: äquivalente Annuität

i = 15% T=5

mit RBF(i;T) = $\frac{(1+i)^T - 1}{(1+i)^T \cdot i} = \frac{1{,}15^5 - 1}{1{,}15^5 \cdot 0{,}15} = 3{,}352155098$

RBF(i, T)

$$\sum_{t=1}^{T} \frac{z}{(1+i)^t} \stackrel{!}{=} \kappa + A_0 \Leftrightarrow z \cdot \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+i)^t} = \kappa + A_0 \Leftrightarrow z = \frac{\kappa + A_0}{\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{(1+i)^t}}$$

$$= \frac{\kappa + A_0}{\text{RBF}(i;T)} = 150 + \frac{A_0}{\text{RBF}(0{,}15;5)}.$$

(0, 150, ..., 150)
t=1 t=5

ungef. = kappa = 502, 82

Der konstante Einzahlungsüberschuss des Unternehmers muss also insgesamt A_0/RBF(0,15;5)+150 GE pro Periode betragen.

b)

$$\text{ANN}(i;T) = \frac{1}{\text{RBF}(i;T)} = \frac{(1+i)^T \cdot i}{(1+i)^T - 1}$$

0; 0,2983; ...; 0,2983)
t=1 t=5

$$\text{ANN}(0{,}15;5) = \frac{1{,}15^5 \cdot 0{,}15}{1{,}15^5 - 1} = 0{,}298315552$$

--> K = 1

Der Annuitätenfaktor ANN(i;T) gibt an, welche gleichbleibende Einzahlung von t = 1 bis t = T bei einem Kalkulationszinsfuß i erforderlich ist, um einen Kapitalwert von genau 1 GE zu generieren.

c) <u>Einzelentscheidung:</u> Projekt durchführen, wenn seine für einen beliebigen Betrachtungszeitraum T berechnete äquivalente Annuität nichtnegativ ist. z >= 0

<u>Auswahlentscheidung:</u> Dasjenige Projekt durchführen, dessen äquivalente Annuität für einen (projektunabhängig fixierten) Betrachtungszeitraum T die größte ist. Die zu vergleichenden Annuitäten müssen sich auf den gleichen Betrachtungszeitraum beziehen. Zmax

Kapitalwertkriterium:
Einzelentscheidung: k >= 0 <--> z >= 0
Auswahlentscheidung: Kmax <--> Zmax

Äquivalenz zum Kapitalwert-Kriterium: $z = \frac{\kappa}{RBF(i;T)}$

Je größer der Kapitalwert, umso größer auch die äquivalente Annuität (für <u>gegebenen</u> Rentenbarwertfaktor!)

Es gilt:

z = 179 von t=1 bis 5   suchen: k

$$z = \kappa \cdot ANN(i;T) \Leftrightarrow \quad \kappa = \frac{z}{ANN(i;T)} = \frac{179}{0{,}298315552} = 600{,}04$$

Der Unternehmer könnte bei z = 179 GE eine Entnahme in Höhe von 600,04 GE tätigen.

(0; 179; ... ; 179) --> k = 600,04

Übungsaufgabe 2:

i = 10%

a)

Erfolgskonsequenzen Projekt 1:   A0 = 300   T = 4

t	1	2	3	4
x_t	30	30 +20% -->	36	36
p_t	20	20 -10% -->	18	18
beschäftigungsabhängig $k_{v,t}$	10	10	10	10
beschäftigungsunabhängig $K_{f,t}$	150	150	150	150
D_t	90	63	44,1	102,9
kZ_t	25,5	17,85	12,495	5,145
G_t	34,5	69,15	81,405	29,955

$$\text{Mit } G_t = x_t \cdot (p_t - k_{v,t}) - K_{f,t} - D_t - kZ_t \text{ gilt:}$$

$$\overline{G}^{(1)} = \sum_{t=1}^{T} G_t^{(1)} / T = 215{,}01/4 = 53{,}7525.$$

Ermittlung der Abschreibung:

		Abschreibung:	Restbuchwert:
t = 0	jeweils 30% des RBW -->	0	300
t = 1	300 · 0,3 =	90	210
t = 2	210 · 0,3 =	63	147
t = 3	147 · 0,3 =	44,1	102,90
t = 4		102,9	0
		Σ = 300	

Ermittlung der kalkulatorischen Zinsen:

t KZt = $i \cdot (RBW_{t-1} + (RBW_{t-1} - D_t))/2$

z.B. t = 1 $0{,}1 \cdot (300+210)/2 = 25{,}5$

t=2 0,1 * (210+147) / 2 = 17,85

Erfolgskonsequenzen Projekt 2:

t	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x_t	25	26	28	29	30	30
p_t	23	23	22	22	21	21
$k_{v,t}$	8	10	9	11	12	10
$K_{f,t}$	200	200	220	180	240	160
D_t	70	70	70	70	70	70
kZ_t	38,5	31,5	24,5	17,5	10,5	3,5
G_t	66,5	36,5	49,5	51,5	–50,5	96,5

ggb.

lin. Abschr.

Mit $G_t = x_t \cdot (p_t - k_{v,t}) - K_{f,t} - D_t - kZ_t$ gilt:

$$\overline{G}^{(2)} = \sum_{t=1}^{T} G_t^{(2)} / T = 250/6 = 41{,}67.$$

Vorteilhaftigkeitsanalyse durch Vergleich der durchschnittlichen Gewinne einer jeweils repräsentativen Periode nicht sinnvoll, da Projekte unterschiedliche Nutzungsdauern aufweisen. Gesamtgewinnmaximierungsabsicht

$\Rightarrow$ Höhe des erzielten Gesamtgewinns bleibt unberücksichtigt!

zudem: unterschiedlicher Mitteleinsatz

--> Vorteilhaftigkeitsanalyse bei einmaliger Durchführung

Erzielbarer Gesamtgewinn:

$$\sum_{t=1}^{T} G_t^{(1)} = 215{,}01 \qquad \sum_{t=1}^{T} G_t^{(2)} = 250$$

$\Rightarrow$ Projekt 2 weist höheren Gesamtgewinn auf.

--> Projekt 2 ist vorzuziehen

Referenzperiode muss zwecks Gewinnvergleichsrechnung identisch sein, damit gewährleistet ist, dass man sich für dasjenige Projekt mit dem höchsten Gesamtgewinn entscheidet:

Referenzperiode T = 4:

$$\frac{\sum_{t=1}^{T} G_t^{(1)}}{4} = \frac{215{,}01}{4} = 53{,}75 \qquad \frac{\sum_{t=1}^{T} G_t^{(2)}}{4} = \frac{250}{4} = \underline{62{,}5}$$

Referenzperiode T = 6:

$$\frac{\sum_{t=1}^{T} G_t^{(1)}}{6} = \frac{215{,}01}{6} = 35{,}84 \qquad \frac{\sum_{t=1}^{T} G_t^{(2)}}{6} = \frac{250}{6} = \underline{41{,}67}$$

--> Projekt 2 ist vorzuziehen

--> Vorteilhaftigkeitsanalyse bei einmaliger DUrchführung

b) Jetzt: Projekt mehrfach wiederholbar

Voraussetzung für Vergleich durchschnittlicher Gewinne: Gleiche Referenzperiode (etwa Durchführung von 3mal Projekt 1 und 2mal Projekt 2). T = 12

--> Projekt 2 ist vorzuziehen

- 3mal Projekt 1 (T = 12): $\frac{\sum_{t=1}^{T} G_t^{(1)}}{T} = \frac{3 \cdot 215{,}01}{12} = 53{,}75$
- 2mal Projekt 2 (T = 12): $\frac{\sum_{t=1}^{T} G_t^{(2)}}{T} = \frac{2 \cdot 250}{12} = 41{,}67$

$\Rightarrow$ Ursprüngliche Rechnung aus a) wäre nunmehr also unter dem Aspekt der Nutzungsdauerdifferenzierung richtig.

c) Kapitalwert-Kriterium:

t	0	1	2	3	κ
$z_t^{(1)}$	–1000	500	500	200	18,03
$z_t^{(2)}$	–1000	**200**	500	**500**	–29,3

<------------------>

$\Rightarrow$ Projekt 1 wird durchgeführt, Projekt 2 dagegen nicht!

Gewinnvergleichskriterium:

<-------------------->

	t	1	2	3		
	z_t	500	500	200	$\bar{z} = 400$	= Summe Zt / T
Z0 -->	D_t	333,33	333,33	333,33	$\overline{D} = 333$	
unabh. von Zt	kZ_t	83,33	50	16,66	$\overline{kZ} = 50$	= Summe A0 / T
	G_t	83,33	116,67	–150	$\overline{G} = 16,67$	

$\Rightarrow$ $\overline{G} = 16,67 \geq 0$, unabhängig von der zeitlichen Reihenfolge der vorgegebenen Deckungsbeiträge.

$\overline{G} = \overline{Z} - \overline{D} - \overline{KZ}$

KZt = i*((RBWt-1 + (RBWt-1 - Dt)) / 2

Projekt 1 wird durchgeführt, Projekt 2 wir auch durchgeführt

Übungsaufgabe 3:

a)

t	0	1	2	3	4	5	Kapital-markt-zinssatz	Renten-barwert-faktor (i;T)
Projekt 1	-1.000	456	456	456			8 %	2,5771
Projekt 2	-1.000	350	350	350	350		8 %	3,3121
Projekt 3	-1.000	295	295	295	295	295	8 %	3,9927

Rentenbarwertfaktoren:

$$RBF(i;T) = \frac{(1+i)^T - 1}{(1+i)^T \cdot i}$$

$$RBF(0{,}08;3) = \frac{1{,}08^3 - 1}{1{,}08^3 \cdot 0{,}08} \approx 2{,}5771$$

$$RBF(0{,}08;4) = \frac{1{,}08^4 - 1}{1{,}08^4 \cdot 0{,}08} \approx 3{,}3121$$

$$RBF(0{,}08;5) = \frac{1{,}08^5 - 1}{1{,}08^5 \cdot 0{,}08} \approx 3{,}9927$$

```
K = - A0 +  ∑ (t=1 bis T) Zt / (1+i)t = -A0 + RBF(i;T) * z
```

Kapitalwerte:

$$\kappa = RBF(i;T) \cdot z - A_0$$

Projekt 1: $\kappa^{(1)} = 2{,}5771 \cdot 456 - 1000 = 175{,}16$

Projekt 2: $\kappa^{(2)} = 3{,}3121 \cdot 350 - 1000 = 159{,}24$

Projekt 3: $\kappa^{(3)} = 3{,}9927 \cdot 295 - 1000 = 177{,}85$

Ertragswerte:

$\kappa = \eta_0 - A_0 \Leftrightarrow \eta_0 = \kappa + A_0$

Projekt 1: $\eta_0^{(1)} = 175{,}16 + 1000 = 1.175{,}16$

Projekt 2: $\eta_0^{(2)} = 159{,}24 + 1000 = 1.159{,}24$

Projekt 3: $\eta_0^{(1)} = 177{,}85 + 1000 = 1.177{,}85$

b) gesucht: Annuität

	Kapital-wert	Lauf-zeit	Kapital-marktzins-satz	Annuitätenf aktor	Annuität
Projekt 1	175,16	3 Jah-re	8 %	1/2,5771	67,97
Projekt 2	159,24	4 Jah-re	8 %	1/3,3121	48,08
Projekt 3	177,85	5 Jah-re	8 %	1/3,9927	44,54

ANN(i;T) = 1/RBF(i;T)

(Äquivalente) Annuität = z $= \dfrac{\kappa}{\text{RBF}(i;T)} = \kappa \cdot \text{ANN}(i;T)$

Projekt 1: $\text{Annuität} = (1/2{,}5771) \cdot 175{,}16 \approx 67{,}97$

Projekt 2: $\text{Annuität} = (1/3{,}3121) \cdot 159{,}24 \approx 48{,}08$

Projekt 3: $\text{Annuität} = (1/3{,}9927) \cdot 177{,}85 \approx 44{,}54$

```
     -1000     456      456       456       K = 175, 16
-      0      67,97    67,97     67,97      K = 175, 16

=    -1000    388,03   388,03    388,03     K = 0
```

c)

Beispiel Projekt 1:

- Berücksichtigung von A_0 = 1.000 GE führt zur Minderung der Einzahlungsüberschüsse pro Periode um 456 – 67,97 = 388,03 GE
- 388,03 = A_0/RBF(0,08;3)
- A_0 wird mit 388,03 GE gleichmäßig nach dem Kapitalwertkriterium auf die Laufzeit verteilt

d)

<u>Wichtig hier:</u>

Festlegung eines <u>*einheitlichen* Betrachtungszeitraumes</u>!

(Wieso?) `<- Berücksichtigen der Laufzeit`

Zum Beispiel für 4 Perioden <u>(T = 4)</u>: `Annuität = k * ANN(i; 4)`

Projekt	Kapitalwert	ANN(0,08;4)	Annuität
1	175,16	1/3,3121	52,88
2	159,24	1/3,3121	48,08
3	177,85	1/3,3121	53,70

Projekt 1: $\text{Annuität} = (1/3{,}3121) \cdot 175{,}16 \approx 52{,}88$

Projekt 2: $\text{Annuität} = (1/3{,}3121)\cdot 159{,}24 \approx 48{,}08$

Projekt 3: $\text{Annuität} = (1/3{,}3121)\cdot 177{,}85 \approx 53{,}70$

Bei einer Auswahlentscheidung wäre Projekt 3 durchzuführen: Für beliebig gewählte Betrachtungszeiträume generiert dieses Projekt die höchste äquivalente Annuität.

Ursache: Projekt 3 hat den höchsten Kapitalwert.

Übungsaufgabe 4:

L = 25.000   i = 5%

Berechnung des Kapitalwertes:

E1 - A1   E2 - A2 + L

$$\kappa = -80.000 - \frac{40.000}{1{,}05} - \frac{5.000}{1{,}05^2} = -122.630{,}39$$

konstante Einzahlung, die zu k führt

Berechnung der Annuität:

z = k * ANN(i; T)

$$\text{ANN} = \frac{1{,}05^2 \cdot 0{,}05}{1{,}05^2 - 1} = 0{,}5378049$$

Jährlicher Subventionsbetrag = –65.951,22 €

-80.000	-40.000	-5.000	k = 122.630,39
	-65.951,22	-65.951,22	k = 122.630,39

Übungsaufgabe 5:

A0 = 5600   T=7

a)

t	1	2	3	4	5	6	7
Absatzmenge x_t	1.500	2.500	2.100	1.600	1.500	800	400
Stückpreis p_t	7	8	9	9	8	8	8
Variable Stückkosten $k_{v,t}$	6	5	4	5	5	6	6
Fixkosten $K_{f,t}$	2.200	2.000	2.700	2.600	2.800	2.850	3.000
Abschreibungen D_t = Ao/T	**800**	**800**	**800**	**800**	**800**	**800**	**800**
durchschn. Mittelbindung	**5.200**	**4.400**	**3.600**	**2.800**	**2.000**	**1.200**	**400**
kalkulat. Zinsen kZ_t	**520**	**440**	**360**	**280**	**200**	**120**	**40**
Periodengewinn G_t	**–2.020**	**4.260**	**6.640**	**2.720**	**700**	**–2.170**	**–3.040**
Restbuchwert RBW	4800	4000	3200	2400	1600	800	0

durchschn. Mittelbindung = (RBWt-1 + (RBWt-1 - Dt) / 2

KZt = i* durchschn. Mittelbindung

Gewinn: $G_t = x_t \cdot (p_t - k_{v,t}) - K_{f,t} - D_t - kZ_t$

<u>Beispielrechnung für t = 1:</u>

- Mittelbindung in t = 0: A_0
- Mittelbindung in t = 1: $A_0 - D_1$
- Durchschnittliche Mittelbindung:

$$\frac{A_0 + (A_o - D_1)}{2} = \frac{5.600 + 4.800}{2} = 5.200$$

- kalkulatorische Zinsen: $kZ_1 = 0{,}1 \cdot 5.200 = 520$
- Periodengewinn:

$$G_1 = 1.500 \cdot (7-6) - 2.200 - 800 - 520 = -2.020$$

<u>Beispielrechnung für t = 2:</u>

- Mittelbindung in t = 1: $A_0 - D_1$
- Mittelbindung in t = 2: $A_0 - D_1 - D_2$
- Durchschnittliche Mittelbindung:

$$\frac{(A_0 - D_1) + (A_0 - D_1 - D_2)}{2} = A_0 - D_1 - \frac{D_2}{2} = 4.800 - 400 = 4.400$$

- kalkulatorische Zinsen: $kZ_2 = 0{,}1 \cdot 4.400 = 440$
- Periodengewinn:

$$G_2 = 2.500 \cdot (8-5) - 2.000 - 800 - 440 = 4.260$$ usw.

Durchschnittlicher Periodengewinn = $\overline{G} = \frac{\sum_{t=1}^{T} G_t}{T}$

Also: $\overline{G} = \frac{\sum_{t=1}^{7} G_t}{7} = \frac{7090}{7} = 1.012,86$

b)

t	0	1	2	3	4	5	6	7
z_t	–5.600 -A0	–700*	5.500	7.800	3.800	1.700	–1.250	–2.200

* –700 = 1.500 · (7 – 6) – 2.200   Zt = Xt (pt - Kv,t) - Kf,t

$$\kappa = -5.600 - \frac{700}{1{,}1} + \frac{5.500}{1{,}1^2} + \frac{7.800}{1{,}1^3} + \frac{3.800}{1{,}1^4} + \frac{1.700}{1{,}1^5} - \frac{1.250}{1{,}1^6} - \frac{2.200}{1{,}1^7}$$

$$\approx 5.985{,}82$$

$$\text{ANN}(0{,}1;7) = \frac{1}{\text{RBF}(0{,}1;7)} = 0{,}2054,$$

$$z = \kappa \cdot \text{ANN}(0{,}1;7) = 1.229{,}49.$$

(0; 1.229,49; ...; 1.229,49) --> k = 5985,82
t=1 t=7

Frage:

Warum ist die äquivalente Annuität höher als der durchschnittliche Periodengewinn?

negative Zt am Ende fallen nicht so stark ins Gewicht, da sie (im Vergleich zu Gleichgewichtung bei der Gewinnvergleichsrechnung) stärker abgezinst werden

Übungsaufgabe 6:

...