HöMa GGÜ 6 18.11.09

A 19

$$I(\Gamma) = \int_\Gamma 3(x-y)\cdot|x-y|\,dx + 3(y-x)\cdot|y-x|\,dy$$

$\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ zu zeigen: $I(\Gamma)$ ist wegunabhängig

Suche: $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla h = \begin{pmatrix} 3(x-y)\,|x-y| \\ 3(y-x)\,|y-x| \end{pmatrix}$

$$\int |x-y|\,dx = \frac{x-y}{2}\,|x-y| + C$$

$$\frac{d}{dx}\,\frac{x-y}{2}\,|x-y| = \frac{1}{2}\left(|x-y| + (x-y)\frac{d}{dx}|x-y|\right)$$

Fallunterscheidung

1. $x > y$: $\frac{d}{dx}\,\frac{x-y}{2}\,|x-y| = \frac{1}{2}\cdot\left(|x-y| + (x-y)\cdot 1\right) = |x-y|$

2. $x < y$: —— " —— $= \frac{1}{2}\cdot\left(|x-y| + (x-y)\cdot(-1)\right) = |x-y|$

Ableitung

$\frac{d}{dx}\left(|x-y|\,\frac{x-y}{2}\right)$ lässt sich stetig in $x=y$ fortsetzen

$$\int \underbrace{(x-y)}_{v(x)}\,\underbrace{|x-y|}_{u'(x)}\,dx \qquad u(x) = \frac{x-y}{2}\,|x-y| \qquad v'(x) = 1 \qquad \text{P.I.}$$

$$= \frac{(x-y)^2}{2}\,|x-y| - \int \frac{x-y}{2}\,|x-y|\,dx$$

Integral auf die linke Seite von "=" ziehen!

$$\Rightarrow \int (x-y)\,|x-y|\,dx = \frac{1}{3}(x-y)^2\cdot|x-y| + c \quad (*)$$

$a(x,y) := 3(x-y)\,|x-y|$, $b(x,y) := 3(y-x)\,|y-x|$

$$\int a\,dx = 3\cdot\int (x-y)\,|x-y|\,dx \overset{(*)}{=} (x-y)^2\,|x-y|$$

$$\int b\,dy = 3\cdot\int (y-x)\,|y-x|\,dy \overset{(*)}{=} (y-x)^2\,|y-x|$$

$$\Rightarrow h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \boxed{(x-y)^2\,|x-y|}$$

ist die gesuchte Fkt. d.h. I ist vom Weg unabhängig

$\Gamma: \gamma(t) = (\cos(\pi t) + t,\ t - \sin(2\pi t))\ ;\ 1 \le t \le 4$

gesucht: $I(\Gamma) = \int_\Gamma 3(x-y)|x-y|dx + 3(y-x)|y-x|\,dy$

$\Rightarrow I(\Gamma) = h(Q) - h(P)$ mit Q Endpunkt, P Anfangspkt v. Γ

$Q = \gamma(4) = (1+4, 4-0) = (5,4)$

$P = \gamma(1) = (-1+1, 1-0) = (0,1)$ Einsetzen in $(x-y)^2|x-y|$

$\Rightarrow I(\Gamma) = h(5,4) - h(0,1) = 1 - 1 = 0$

A20 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) = T(x^*,y^*) := x^* - x^*y^*, x^*y^* \overset{!}{=} (x,y)$

Keine Veränderung wegen dem Stern

Bestimme T^{-1}

lösen (1) $x = x^* - x^*y^*$ | nach x^*, y^* auf:

(2) $y = x^*y^*$ | (3) in (2) ableiten

(1) + (2) $x^* = x + y$ (3) $\Rightarrow y = (x+y)\cdot y^*$

$\Rightarrow$ wegen $x+y = x^* \neq 0$

gilt $y^* = \frac{y}{x+y}$

Damit gilt: $T^{-1}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \to \mathbb{R}^2$:

$T^{-1}(x,y) = \left(x+y, \frac{y}{x+y}\right)$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(x^*,y^*)}\right| = |\det DT(x^*,y^*)| = \left|\det \begin{pmatrix} 1-y^* & -x^* \\ y^* & x^* \end{pmatrix}\right| \quad \begin{matrix} \text{nach } x^* & \text{nach } y^* \\ & \\ x & \\ y & \end{matrix}$$

Funktionaldet.

$= |(1-y^*)x^* + x^*y^*| = |x^*|$

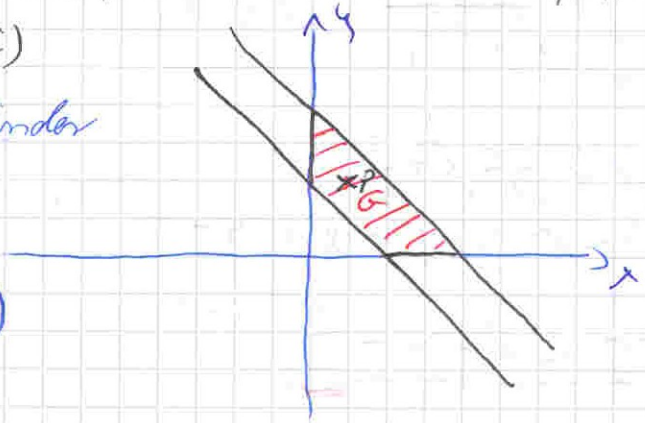
Kommt ans Integral, nach der Substitution

vgl. dx wird ersetzt $\frac{z}{dz}$

b) G: Gebiet begrenzt durch Geraden

$x+y=1$, $x+y=2$, $x=0$, $y=0$ und enthält $P(\frac{1}{2}, 1)$

Berechne $G^* = T^{-1}(G)$



$T^{-1}(x,y) = (x+y, \frac{y}{x+y})$

Ränder gehen auf Ränder (T^{-1} stetig)

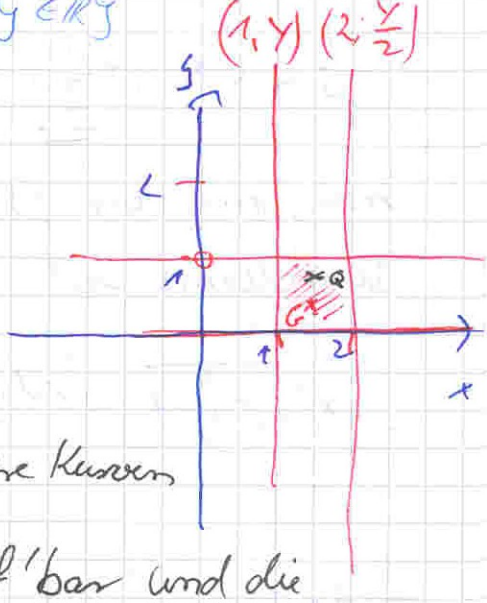
$T^{-1}(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x+y=2\}) = \{(2, \frac{y}{2});\ y\in\mathbb{R}\}$

$T^{-1}(\{x,y\in\mathbb{R}^2;\ x+y=1\}) = \{(1, y),\ y\in\mathbb{R}\}$

$T^{-1}(\{x=0;\ y\neq 0\}) = \{(y;1),\ y\neq 0\}$

$T^{-1}(\{x\neq 0;\ y=0\}) = \{(x,0),\ x\neq 0\}$

$T^{-1}(P) = (\frac{3}{2}, \frac{2}{3}) = Q$



c)

$\int_G e^{\frac{y}{x+y}}\, dx\,dy$ $\quad \partial G, \partial G^*$ sind reguläre Kurven

$T: G^* \to G$ ist bijektiv, stetig diff'bar und die Umkehrung auch.

Rand von G

$f(x,y) = e^{\frac{y}{x+y}}$ stetig auf $\overline{G}$

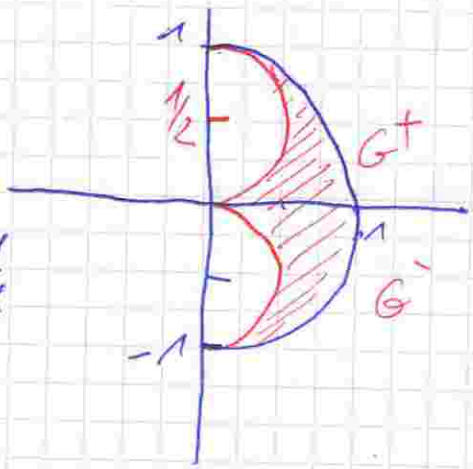
$f(T(x^*,y^*)) = e^{\frac{x^*y^*}{x^*-x^*y^*+x^*y^*}} = e^{y^*}$

$\Rightarrow$ Der Transformationssatz: $\int_G e^{\frac{y}{x+y}}\, dx\,dy = \int_{G^*} e^{y^*} x^*\, dx^*\, dy^*$

$= \int_{x^*=1}^{2}\int_{y^*=0}^{1} e^{y^*} x^*\, dy^*\, dx^* = \frac{3}{2}(e-1)$

A21 $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, |y| < x^2+y^2 < 1\}$

$$\int_G \frac{x}{(x^2+y^2)^2+1}\, dx\, dy$$



G Symm. bzgl. x-Achse

1. $y > 0 : y < x^2+y^2$

$\Leftrightarrow 0 < x^2+y^2-y = x^2+(y-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < x^2+(y-\frac{1}{2})^2$ G^+

2. $y<0$ analog

$\frac{1}{4} < x^2+(y+\frac{1}{2})^2$ G^- $\Rightarrow \int = 2\int$ Integrand ist gerade in y

$G \quad G$

Transform. auf Polarkoordinaten: T

$x = r\cdot\cos\varphi$

$y = r\cdot\sin\varphi$

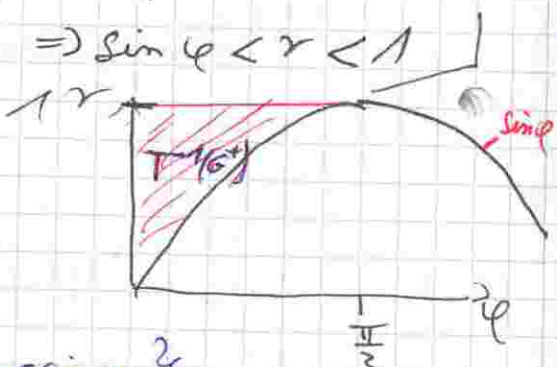
Funktional-Det: $r = |\det DT(r,\varphi)|$

$$\int_G \frac{x}{\underbrace{(x^2+y^2)^2}_{=r}+1}\, dx\, dy = 2\int_{T^{-1}(G^+)} \frac{r\cdot\cos\varphi}{r^4+1}\, r\, dr\, d\varphi$$

N.R.: $y < x^2+y^2 < 1$

$r\sin\varphi < r^2 < 1$

$\Rightarrow \sin\varphi < r < 1$



$T^{-1}(G^+) = \{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$\sin\varphi < r < 1\}$

$$\Rightarrow I = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\sin\varphi}^{1} \frac{r^2\cos\varphi}{r^4+1}\, dr\, d\varphi$$

$T^{-1}(G^+) = \{(r,\varphi) \mid 0 < r < 1,\ 0 < \varphi < \arcsin r\}$

$$I = 2\cdot\int_0^1\int_0^{\arcsin r} \frac{r^2\cos\varphi}{r^4+1}\, d\varphi\, dr = 2\cdot\int_0^1 \frac{r^2}{r^4+1}\Big[\sin\varphi\Big]_0^{\arcsin r} dr$$

$$= 2\int_0^1 \frac{r^3}{r^4+1}\, dr = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{4r^3}{r^4+1}\, dr$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\Big[\ln(r^4+1)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\log 2$$