# Grundgebiete der Elektrotechnik III
# Kleingruppenübung WS 09/10 - Musterlösung

**Aufgabe 6:**
**Aufgabenteil a.)**

**<u>F:</u> Wie muss ich das angehen und wie löse ich den Aufgabenteil am Besten ?**
**<u>A:</u> Mit dem Satz von Gauss, der Spannungsformel und geometrischen Zusammenhängen !**

*Wir berechnen das E-Feld mit Hilfe des Satzes von Gauss:*

Ausgangspunkt ist hierbei: $\oint\!\!\oint \vec{D}\,\overrightarrow{dA} = \iiint \rho\,dV$

Nun formen wir dies mal etwas aus: $\oint\!\!\oint \varepsilon\cdot\vec{E}\,\overrightarrow{dA} = \iiint \rho\,dV$

*<u>Hier sind nun einige Dinge zu erkennen:</u>*

z.B. ist aus der Aufgabe nicht direkt ersichtlich, dass man annehmen soll, dass ql sich auf eine Kreisscheibe bezieht und damit der Zylinder die Ladung $Q = q_l\cdot d$ hat.
Genauer hergeleitet gestaltet sich dies wie folgt:
$Q = \sigma_e\cdot H_{zyl}$

$$\left[ = \underbrace{\sigma_e\cdot 2\cdot a\cdot\rho_1}_{}\cdot d \quad \text{mit} \quad q_l := \sigma_e\cdot 2\cdot a\cdot\rho_1 \text{ folgt:} \right.$$
$$\Rightarrow \quad q_l \quad \cdot d \;\text{ mit } q_l = \text{Ladung pro Stück Q'}$$

Nun muss man noch etwas weiter überlegen und sich Fragen in welche Richtung wohl das E-Feld zeigen wird, offensichtlich in $E_\rho$-Richtung... wieso ? Nun, wir berechnen das Feld in Richtung der Wand und diese liegt nunmal Radialsymetrisch rundum.
Das Feld tritt als genau an der Mantelfläche des Leiters auf, welcher die Fläche $Mantel = 2\cdot r\cdot\pi\cdot h$ hat, in unserem Fall ist dies $Mantel = 2\cdot\rho\cdot\pi\cdot d$
Aufgelöst und eingesetzt steht dann dort:
$\varepsilon\cdot E\cdot 2\cdot\rho\cdot\pi\cdot d = q_l\cdot d$ wie man schon sieht, hier fällt d raus ! Sprich es ist egal wie lang der Leiter ist !
Wenn man es nicht sofort sieht, dann kann man auch wie folgt lösen: $\oint\!\!\oint E\,\overrightarrow{dA} = \dfrac{U}{L} = 2\cdot\rho\cdot\pi\cdot d\cdot\overrightarrow{E_\rho(\rho)}$ da
$E = E_\rho\cdot\vec{e}_\rho$ ist $\vec{E}_\rho = \overrightarrow{E_\rho(\rho)}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q_l}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\vec{e}_\rho$$

Die Spannung hat als Standardform $U = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\,ds$ in unserem Fall: $U = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \vec{E}\,ds = \dfrac{ql}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\ln\left(\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)$ da

**F:** Wieso ist da kein Vektor mehr an der Spannung ?
**A:** Weil $\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_\rho = 1$ ist.

**F:** Wieso geht die Spannung in Richtung ρ?
**A:** Weil in der Aufgabe die Spannung in Richtung Wand gefragt ist.

**Aufgabenteil b.)**

**F: Was ist hier die Idee ?**
**A: Die Idee ist die gewonnene Spannungsformel auf $q_l$ umzustellen und dann das gewonnene $q_l$ in die E-Feld Formel einzusetzen.**

$$q_l = U \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon}{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)} \Rightarrow \vec{E} = \frac{U}{\rho \cdot la\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)} \cdot \vec{e}_\rho$$

**Aufgabenteil c.)**

**F: Wo ist hier das E-Feld maximal !? und wieso ?**
**A: Man sollte sich hier selbst fragen wie die Felderzeugende Ladung ist ... Offensichtlich nur im Leiter ... d.h. das Feld wird vom Zylinder in der Mitte erzeugt, runterherum kann das Feld nur noch abnehmen, d.h. das Feld muss offensichtlich an der Grenzfläche, genauer an jedem Punkt der Mantelfläche in Richtung der Wand maximal sein, d.h. bei $\rho_1$.**

$$|Emax| = \left|E\left(\rho_1\right)\right| = \frac{U}{\rho_1 \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)} \text{ für } |z| < \frac{d}{2}$$

**Aufgabenteil d.)**

**F: Wie geht das ?**
**A: Einfach nur einsetzen und umformen !**

Die Annahme is hier das Streufelder vernachlässigt werden...

$$C_1 = \frac{Q}{U} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot d}{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}$$

**Aufgabenteil e.)**

**<u>F:</u> Was muss man hier beachten und wie geht das ?**
**<u>A:</u> Hier sollte man sich nochmals das passende Kapitel im Skript anschauen, hierin werden die Paarungen der Potentialpunkte erläutert. Hierbei sollte man aufpassen, dass man sich nicht vertut.**

$$\varphi_{a_j} = \varphi_{e_j} \text{ und } \varphi_{b_j} = \varphi_{d_j} \text{ für } j = 1 \ldots 5$$
$$\varphi_{x_1} = \varphi_{x_5} \text{ und } \varphi_{x_2} = \varphi_{x_4} \text{ für } x = a \ldots e$$

**Aufgabenteil f.)**

**<u>F:</u> Wie geht das ?**
**<u>A:</u> Lineares Gleichungssystem aufstellen und lösen !**

$$\varphi_{a_1} = \frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\varphi_{b_1}\right) \text{ und } \varphi_{b_1} = \frac{1}{4}\cdot\left(\varphi_{b_1} + \varphi_{c_1} + \varphi_{d_2}\right)$$
$$\varphi_{c_1} = \frac{1}{4}\cdot\left(U + 2\cdot\varphi_{b_1}\right) \text{ und } \varphi_{d_2} = \frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot U + 2\cdot\varphi_{b_1}\right)$$

alles in allem ist dann der Endvektor: $\Rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_{a_1} \\ \varphi_{b_1} \\ \varphi_{c_1} \\ \varphi_{d_1} \end{bmatrix} = \frac{U}{20}\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 13 \end{bmatrix}$

## Aufgabe 6

Ein zylinderförmiger Leiter mit dem Radius $\rho_1$ wird durch eine leitfähige Wand der Dicke $d$ geführt. Die Wanddurchführung mit dem Radius $\rho_2$ ist mit einem Isolator $\varepsilon$ gefüllt (Abbildung 5). Der Leiter trägt den Ladungsbelag $q_L$ und hat das elektrische Potential $\varphi_e = U$. Die Wand ist geerdet ($\varphi_e = 0$).

HINWEIS: Streufelder für $|z| > \frac{d}{2}$ sind zu vernachlässigen (keine Randeffekte).

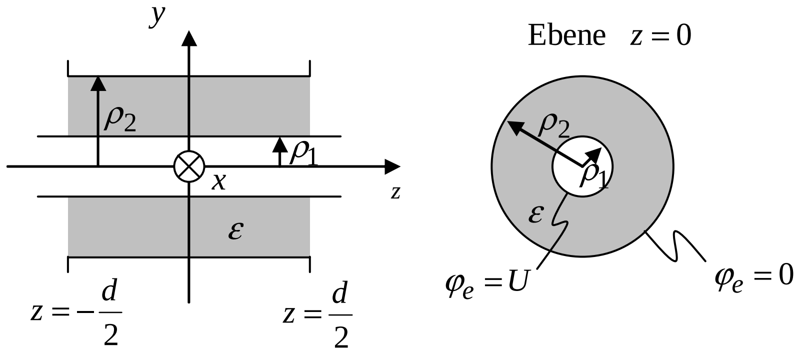


Abbildung 5

a) Geben Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ im Isolator an. Berechnen Sie die Spannung $U$ zwischen Leiter und Wand durch Integration über $\vec{E}$.

b) Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ in Abhängigkeit von $U$, d.h. unabhängig von $q_L$.

c) An welchem Ort ist der Betrag der elektrischen Feldstärke $|\vec{E}|$ maximal? Wie groß ist dieser Wert?

d) Wie groß ist die Kapazität $C_1$ der Anordnung?

Der zylinderförmige Leiter wird nun durch eine quadratische Öffnung in der Wand mit der Kantenlänge $l = 6\rho_1$ geführt (Abbildung 6). Der Zwischenraum ist wiederum mit einem Isolator $\varepsilon$ gefüllt. Zwischen Leiter und Wand liegt weiterhin die Spannung $U$ an. Die Potentialverteilung im Zwischenraum soll numerisch bestimmt werden. Dazu werden die Gitterpunkte $a_1$ bis $e_5$ betrachtet.

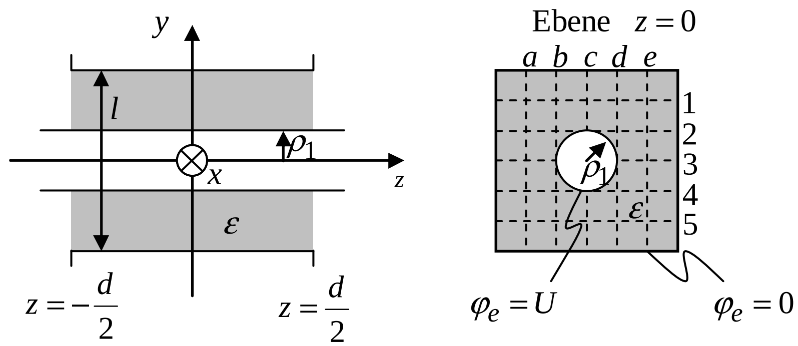


Abbildung 6

e) Welche Gitterpunkte haben aus Symmetriegründen gleiches Potential? Für wie viele Gitterpunkte muss das Potential mindestens berechnet werden?

f) Stellen Sie für das Potential dieser Punkte ein Gleichungssystem mit Hilfe des zweidimensionalen, diskreten Laplaceoperators auf (Differenzenverfahren).