A 15)

$\bar{X}_4 = 1/4\,(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$ Stichprobenmittelwert

a) $E(\bar{X}_4) = E\left[1/4\,(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)\right] = 1/4\; E\left[\sum_{i=1}^{4} X_i\right]$

$= 1/4\left(E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4]\right) = 1/4\,(\mu + \mu + \mu + \mu) = \mu$

$Var(\bar{X}_4) = Var\left(1/4\,(X_1 + \ldots + X_4)\right) = 1/16\; Var\left(\sum_{i=1}^{4} X_i\right)$

$= 1/16\left(Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) + Var(X_4)\right)$

$= 1/16\,(4 \cdot \sigma^2) = 1/4\;\sigma^2$

Hinweise aus A 13

$E[aX] = a \cdot E[X]$ $\qquad Var[aX] = a^2\,Var[X]$

$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$ $\qquad$ S. 31 Skript (5):

$Var(X+Y) \overset{\text{st. unabh.}}{=} Var(X) + Var(Y) + 2\underbrace{Cov(X,Y)}_{0}$

$= Var(X) + Var(Y)$

---

b) Betrachte $Y = 1/8\,X_1 + 1/8\,X_2 + 1/4\,X_3 + 1/2\,X_4$

$E(Y) = E\left(1/8\,X_1 + 1/8\,X_2 + 1/4\,X_3 + 1/2\,X_4\right)$

$= E(1/8\,X_1) + E(1/8\,X_2) + E(1/4\,X_3) + E(1/2\,X_4)$

$= 1/8\,E(X_1) + 1/8\,E(X_2) + 1/4\,E(X_3) + 1/2\,E(X_4) = \mu$

$Var(Y) = Var\left(1/8\,X_1 + 1/8\,X_2 + 1/4\,X_3 + 1/2\,X_4\right)$

$= Var(1/8\,X_1) + Var(1/8\,X_2) + Var(1/4\,X_3) + Var(1/2\,X_4)$

$= 1/64\;Var(X_1) + 1/64\;Var(X_2) + 1/16\;Var(X_3) + 1/4\;Var(X_4) = \frac{11}{32}\,\sigma^2$

(2)

c) Da $\frac{11}{32}\sigma^2 > \frac{1}{4}\sigma^2$ folgt $Var(Y) > Var(\bar{X}_4)\ \forall \sigma^2 > 0$

$\bar{X}_4$ nennt man „effizienter" als Y, wenn $Var(\bar{X}_4) < Var(Y)$

A 16) a) $E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E(X_1 + \ldots + X_n)$

$= \frac{1}{n}\left(E(X_1) + \ldots + E(X_n)\right) = \frac{1}{n}(n \cdot \mu) = \mu$

b) $E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2\right)$

Nebenrechnung 1 (NR1):

i) $Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(Var(X_1) + \ldots + Var(X_n)\right)$

$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{1}{n}\cdot\sigma^2$

ii) $Var(\bar{X}_n) = E(\bar{X}_n^2) - \left(E(\bar{X}_n)\right)^2 = E(\bar{X}_n^2) - \mu^2 = \frac{1}{n}\cdot\sigma^2$

$\Leftrightarrow \boxed{E(\bar{X}_n^2) = \frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2}$

NR2:

i) $Var(X_i) = \sigma^2 = E(X_i^2) - \left(E(X_i)\right)^2 = E(X_i^2) - \mu^2 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

ii) $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = E(X_1^2 + \ldots + X_n^2) = E(X_1^2) + E(X_2^2) + \ldots + E(X_n^2)$

$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n}(\sigma^2 + \mu^2) = n \cdot (\sigma^2 + \mu^2)$

Fortsetzung b) $= \left(E\left(\sum(X_i^2 - 2X_i\bar{X}_n + \bar{X}_n^2)\right)\right)\cdot\frac{1}{n-1}$

$= \left(E\left(\sum X_i^2 - 2\bar{X}_n \cdot \sum X_i + \sum \bar{X}_n^2\right)\right)\cdot\frac{1}{n-1}$

③

$$= \frac{1}{n-1}\left(E\left(\sum X_i^2\right) - \bar{X}_n n E\left(n \cdot \bar{X}_n\right)^2 + E\left(\sum \bar{X}_n^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n \cdot (\sigma^2 + \mu^2) - 2 n E(\bar{X}_n)^2 \cancel{+ nE(\bar{X}_n)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n \cdot \sigma^2 + n \cdot \mu^2 - n \cdot E\left((\bar{X}_n)^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 + n \cdot \mu^2 - n\left(\frac{1}{n} \cdot \sigma^2 + \mu^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left((n-1)\sigma^2\right) = \sigma^2$$

c) $E(X_1) \overset{?}{=} \mu$ ✓ (Ja!) Sind wir von ausgegangen...

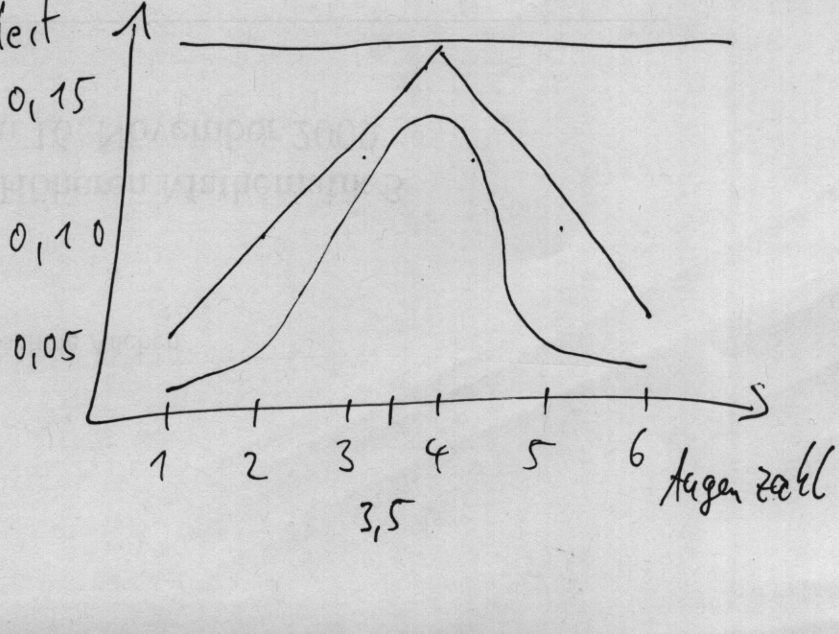
d) $Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var(X_1 + \ldots + X_n)$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(Var(X_1) + \ldots + Var(X_n)\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2$$

e) $Var(X_1) \overset{?}{=} \sigma^2$ ✓ f) „besonders wichtig Konsistenz"...

Gleichverteilung bei Würfel:

(keine Normalverteilung)



A17) ④

Y_i : Änderung des Alkohol Konsums

c) $n = 900$ Stichprobenmittelwert $\bar{Y}$

a) $H_0: \mu = 0$

b) $H_1: \mu < 0$

$$\bar{Y} = \frac{1}{900} \sum_{i=1}^{900} Y_i = -0{,}970\, l$$

klein s (Stichprobenstandardabweichung)

$$s = \sqrt{s^2} = 13{,}793\, l \quad \rightarrow \bar{Y} \xrightarrow{d} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(distribution)

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{Y} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$P(\bar{Y} \le \underbrace{\cancel{\Phi}}_{-0{,}970}) \Leftrightarrow P\left(\frac{30(\bar{Y}-\mu)}{\sigma} \le \frac{30(-0{,}970-\mu)}{\sigma}\right)$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{30\,\bar{Y}}{\sigma} \le \frac{30 \cdot (-0{,}970)}{\sigma}\right)$$

$$\Leftrightarrow P\Big(\underbrace{\frac{30\,\bar{Y}}{13{,}793}}_{\sim N(0,1)} \le \underbrace{-2{,}11}_{\text{T-Statistik}}\Big) = \underbrace{\Phi(-2{,}11) = 0{,}0179}_{\text{P-Wert (W'keit)}}$$

A18) Stichprobenmittelwert?