HöMa3 Übung5 am 11.11.09

A15) $F\,[-1;1] \to \mathbb{R} \qquad F\,(x) := \int\limits_0^\infty xe^{-x^2y^2}dy$

Zu Zeigen gilt das F(x) konvergiert, allerdings nicht gleichmäßig.

$= \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b xe^{-x^2y^2}dy \overset{z=xy}{=} \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^{xb} e^{-z^2}dz$

- 1. Fall $x > 0 \quad \Rightarrow F(x) = \int\limits_0^\infty e^{-z^2}dz$

  $e^x \geq 1 + x$, also $e^{z^2} \geq 1 + z^2 \Rightarrow e^{-z^2} \leq \frac{1}{1+z^2}$

  $0 \leq F(x) = \int\limits_0^\infty e^{-z^2}dz \leq \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+z^2}dz = \lim\limits_{b\to\infty} [\arctan z]_0^b = \lim\limits_{b\to\infty} [\arctan b] = \frac{\pi}{2}$

  $0 \leq F(x) = \int\limits_0^\infty e^{-z^2}dz \leq \frac{\pi}{2}$

  Genauer genommen ist : $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

- 2.Fall $x = 0 \qquad \Rightarrow F(0) = 0$

- 3.Fall $x < 0$ $\Rightarrow$susbtituiere in 1.Fall $z := -u$

  $F(x) = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^{-xb} -e^{-u^2}\mathrm{d}u = -\int\limits_0^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Zusammen gilt :$F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2} & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -\frac{\sqrt{\pi}}{2} & ; x < 0 \end{cases}$ D.h Konvergenz bewiesen.

Annahme : F(x) sei gleichmäßig Konvergent

$f\,(x, y) = xe^{-x^2y^2}$ ist auf $[-1, 1] * \mathbb{R}$ stetig.

Nach Satz 6.3) ist dann F stetig .

Da aber F in der Stelle 0 eine Sprungstelle hat, ist die Annahme falsch und daher :

F ist nicht gleichmäßig Konvergent.

A16) $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}\; F(t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(xt)dx$

$\left|e^{-x^2}cos(xt)\right| \leq e^{-x^2}\ \forall x, t \in \mathbb{R}$

Daher existieren die Integrale $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$, $\int\limits_{-\infty}^0 e^{-x^2}dx$ und konvergieren.
Die Fkt. $f(x,t) = e^{-x^2}cos(xt)$ ist stetig auf $\mathbb{R} * [-1,1]$
Nach Satz 6.2 folgt $\Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos(xt)dx$, $\int\limits_{-\infty}^0 e^{-x^2}\cos(xt)dx$
konvergieren gleichmäßig auf $[-1,1]$
Nach der Additivität der Integrale :
$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\cos(xt)dx$ konvergiert gleichmäßig mit $t \in [-1,1]$
Bew. gilt analog $\forall t \in [a,b] \Rightarrow$gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

A17) $\gamma[0,1] \to \mathbb{R} \qquad \gamma(t) := (\cos(\pi t), 2\sin(\pi t), t)$

Vektorfeld $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x,y,z) := \left(-yze^{z^2}, xze^{z^2}, arctan\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z\right)\right)$
Berechne das Kurvenintegral $\int\limits_\Gamma f\, d\gamma$

- γ stetig diff'bar
  $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\pi\sin(\pi t) \\ 2\pi\cos(\pi t) \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\left\|\gamma'(t) = \sqrt{\pi^2 sin^2(...) + 4\pi^2 cos^2(...) + 1}\right\| \neq 0 \ \ \forall t \in [0,1]$
- Γ ist Doppelpunkt frei, denn :
  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \quad \Leftrightarrow t_1 = t_2$

$\Rightarrow \Gamma$ ist eine Reguläre Kurve, d.h Stetig Diff'bar , hält an keinem Ort an (vgl. Steigung nicht 0) und kein Wert wird vielfach angenommen.

- f stetig auf $\mathbb{R}^3$, dann gilt $\int\limits_\Gamma f\,\mathrm{d}\gamma = \int\limits_0^1 \overbrace{f(\gamma(t))\cdot\gamma' t}^{Skalarprodukt}\mathrm{d}t$

$$= \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} -2\sin(\pi t)\, t \cdot e^{t^2} \\ \cos(\pi t)\, t \cdot e^{t^2} \\ \arctan\left(\cos^2(\pi t) + \frac{1}{4}\cdot 4\sin^2(\pi t) + t\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\pi\sin(\pi t) \\ 2\pi cos(\pi t) \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int\limits_0^1 2\pi te^{t^2}\overbrace{\sin^2(\pi t) + \cos^2(\pi t)}^{1}\cdot 2\pi te^{t^2} + \arctan\left(\overbrace{\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t)}^{1} + t\right) dt$$

$$= \int\limits_0^1 2\pi te^{t^2} + \arctan(1+t)\, dt = \int\limits_0^1 2\pi te^{t^2} dt + \int\limits_0^1 \arctan(1+t)\, dt$$

$$= \left[\pi e^{t^2}\right]_0^1 + \left[(1+t)\arctan(1+t) - \tfrac{1}{2}\ln\left((1+t)^2 + t\right)\right]_0^1$$

$$= \pi e - \pi + 2\arctan(2) - \tfrac{1}{2}\ln 5 - \frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\ln(2)$$

$$= \pi\left(e - \frac{5}{4}\right) + 2\arctan(2) - \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{5}{2}\right)$$

A18) Ist $\int\limits_{\Gamma} \left[\underbrace{|y-z|\,dx}_{a(x,y,z)} - \underbrace{|z-x|\,dy}_{b(x,y,z)} + \underbrace{|x-y|\,dz}_{c(x,y,z)} \right]$ wegunabhängig ?

2.) Welchen Wert besitz das Integral für $\Gamma : \gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}$

dazu:

1.) Gebiet $G := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \, x > y > z \right\}$ ist einfach zusammenhängend.

auf $\bar{G}$ ist $f = (a,b,c)$wegen $C^1 - Vektorfeld$ (d.h 1 mal stetig diff'bar)

Satz 2.4)

Das Integral ist unabh. vom Weg $\Leftrightarrow rot\,(\underline{t}) = \underline{0}$

Berechne $rot\,(\underline{t}) =$ "$\nabla \star \underline{t}$" $= \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \partial_2 c - \partial_3 b \\ \partial_3 a - \partial_1 c \\ \partial_1 b - \partial_2 a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ -1-1 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

$\Rightarrow$ Das Integral ist nicht wegunabhänging.

2.) Prüfe Voraussetzung von Satz 1.2

- γ stetig diff'bar

-$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{sin^2(t) + cos^2(t) + cos^2(t)} = \sqrt{1 + cos^2(t)} \neq 0\ \forall t$

-Γist Doppelpunktfrei , da $(cos\,(t)\,, sin\,(t))\,,\ t \in [0,\pi]$ ein Halbkreis ist.

$\Rightarrow$ist reguläre Kurve

$f\,(x,y,z) = (|y-z|\,, -|x-z|\,, |y-x|)$ist stetig auf $\mathbb{R}^3$

$$\overset{Satz\,1.2}{\Rightarrow} \int\limits_{\Gamma} t d\gamma = \int\limits_{0}^{\pi} t\,(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} \begin{pmatrix} |sin(t) - sin(t)| \\ -|+cos(t) - sin(t)| \\ |sin(t) - cos(t)| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -sin(t) \\ cos(t) \\ cos(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} \left[0 - \underbrace{cos\,(t)\,|cos(t) - sin(t)| + cos(t)\,|sin(t) - cos(t)|}_{=0} \right] dt$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} 0 dt = 0$$