Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 05 vom 09. November 2009

Teil A

Aufgabe A15 Zeigen Sie, dass das uneigentliche Parameterintegral $F : [-1;1] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) := \int_0^\infty x e^{-x^2 y^2} \, \mathrm{d}y$$

konvergiert, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis $\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ verwenden.

Aufgabe A16 Zeigen Sie, dass das uneigentliche Parameterintegral $F : [-1;1] \to \mathbb{R}$,

$$F(t) := \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \cos(xt) \, \mathrm{d}x$$

gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe A17 Seien die Raumkurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrisiert durch $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) := (\cos(\pi t), 2\sin(\pi t), t)$$

und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,z) := \left(-yze^{z^2}, xze^{z^2}, \arctan\left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z\right)\right).$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma .$$

Aufgabe A18 Untersuchen Sie, ob das Kurvenintegral

$$I := \int_\Gamma (|y-z| \, \mathrm{d}x - |z-x| \, \mathrm{d}y + |x-y| \, \mathrm{d}z) \text{ (mit } \Gamma \text{ Kurve im } \mathbb{R}^3)$$

vom Weg unabhängig ist und bestimmen Sie seinen Wert für die Kurve

$$\Gamma : \gamma(t) = (\cos t, \sin t, \sin t), 0 \le t \le \pi .$$

ü

Teil B

Aufgabe B18 Zeigen Sie, dass das uneigentliche Parameterintegral $G : [-1; 1] \to \mathbb{R}$,

$$G(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, x \sin(xt)\, \mathrm{d}x$$

gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe B19 Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \left(\int_0^\infty f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad \neq \quad \int_0^\infty \left(\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x,y) := (2 - xy)xy\, e^{-xy}$, gilt. Warum ist dies kein Widerspruch zu Satz 6.4?

Aufgabe B20 Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und die ebene Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ parametrisiert durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))$$

und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \left(\frac{\alpha x - \beta y}{x^2 + y^2}, \frac{\alpha y + \beta x}{x^2 + y^2} \right).$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f \cdot d\gamma .$$

Aufgabe B21 Sei $G := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 > 0 \right\}$ und

$$I(\Gamma) := \int_\gamma \frac{y}{9x^2 + 4y^2}\mathrm{d}x - \frac{x}{9x^2 + 4y^2}\mathrm{d}y$$

ein Kurvenintegral in G.

(a) Sei Γ_1 die negativ orientierte Ellipse $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$. Berechnen Sie $I(\Gamma_1)$.

(b) Ist $I(\Gamma)$ in G vom Weg unabhängig?

AM3 GÜ 5

12. NOV. 2009

Satz 6.2.

$f: [c,d] \times [a,\infty) \to \mathbb{R}$

$g: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig

$\int_a^\infty g(y)\,dy$ konv. $|f(x,y)| \leq g(y)$

$\forall (x,y) \in [c,d] \times [a,\infty)$

$\Rightarrow \int_a^\infty f(x,y)\,dy$ konv. glm. auf $[c,d]$

6.3. Satz

$f: [c,d] \times [a,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig

$F(x) = \int_a^\infty f(x,y)\,dy$ glm. konv. auf $[c,d]$

$\Rightarrow$ ~~F(x)~~ $F: [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig

A15.) $F: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^\infty x\, e^{-x^2y^2}\,dy$

1.) für jedes x konv. $F(x)$.

2.) $F(x)$ ist nicht glm. konv.

$\boxed{\text{Hinweis: } \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

Beweis:

1.) $F(x) = \int_0^\infty x \cdot e^{-x^2y^2}\,dy$

$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b x\, e^{-x^2y^2}\,dy$

$z = xy$

$\frac{dz}{dy} = x \Rightarrow dy = \frac{dz}{x}$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^{x\cdot b} \cancel{x}\cdot e^{-z^2} \frac{dz}{\cancel{x}}$$

$$= \begin{cases} \int_0^\infty e^{-z^2} dz & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\int_0^\infty e^{-z^2} dz & x<0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\pi/2} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\sqrt{\frac{\pi}{2}} & x<0 \end{cases}$$

$$= \underline{\underline{\operatorname{sign}(x)\cdot\sqrt{\pi/2}}}$$

D.h. für alle $x\in[-1,1]$ konvergiert das Integral.

2.) Da $f(x,y) = x\cdot e^{-x^2y^2}$ stetig auf $\mathbb{R}^2$ und F nicht stetig in 0

$\overset{6.3.}{\Rightarrow}$ F ist nicht gleichmäßig konvergent $\square$

A16.) Das uneigtl. Parameter Integral

$F: [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^\infty e^{-y^2} \cos(xy)dy$

ist glm. konvergent.

dazu $f(x,y) = e^{-y^2}\cos(xy)$, $g(y) = e^{-y^2}$

f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$, und

$|f(x,y)| = |e^{-y^2}\cos(xy)| \le e^{-y^2} = g(y)$

$\forall y\in[0,\infty)\ \forall x\in[-1,1]$

Weiterhin (Hinweis A15)

$$\int_0^\infty g(y)dy = \sqrt{\pi/2}$$

D.h. mit Satz 6.2. folgt, dass

$F(x) = \int_0^\infty e^{-y^2}\cos(xy)dy$ glm. auf $[-1,1]$ konvergiert. $\square$

AM3 GÜ 5

12. NOV. 2009

<u>1.2 Satz</u> Γ reg. Kurve, d.h. es ex.

Par. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$;

γ stetig diff'bar, $\|\gamma'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$,

γ ist doppelpunktfrei.

f in einer Umg. von Γ def. und stetig

$\Rightarrow \int_\Gamma f \, dx$ existiert und

$$\int_\Gamma \underline{f} \, d\underline{x} = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

<u>A17.)</u> Sei Γ die Kurve die parametrisiert ist durch $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$t \mapsto (\cos(\pi t), 2\sin(\pi t), t)$

und das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -yze^{z^2} \\ xze^{z^2} \\ \arctan(x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z) \end{pmatrix}$$

<u>Aufgabe:</u> Berechne $\displaystyle\int_\Gamma \underline{f} \, d\underline{\gamma}$

<u>dazu</u> 1.) überprüfe Vor. für Satz 1.2

- γ ist stetig diff'bar
- $\gamma'(t) = (-\pi \sin(\pi t), 2\pi\cos(\pi t), 1)$
- $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\pi^2 \sin^2(\pi t) + 4\pi^2 \cos^2(\pi t) + 1} \neq 0 \quad \forall t$
- $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$

$\Rightarrow t_1 = t_2$, d.h. Doppelpunktfrei

$\Rightarrow \Gamma$ regulär

– f ist als Produkt und Komposition von stetigen Fkt.

2.) Satz (1.2.) sagt: $\int_\Gamma f\, d\gamma$ ex. und

$$\int_\Gamma \underline{f}\, d\underline{\gamma} = \int_0^1 f(\gamma(t))\cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} -2\sin(\pi t)\, t e^{t^2} \\ \cos(\pi t)\, t e^{t^2} \\ \arctan(\underbrace{\cos^2(\pi t) + 4\,\tfrac{1}{4}\cdot \sin^2(\pi t)}_{=1} + t^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\pi \sin(\pi t) \\ 2\pi \cos(\pi t) \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 2\pi \cdot \sin^2(\pi t)\, t \cdot e^{t^2} + 2\pi \cos^2(\pi t)\, t e^{t^2} + \arctan(1+t^2)]\, dt$$

$$= \int_0^1 \left[2\pi t e^{t^2} + \arctan(1+t^2) \right] dt$$

$$= \left[\pi \cdot e^{t^2}\right]_0^1 + \left[(1+t^2)\arctan(1+t^2) - \tfrac{1}{2}\ln(1+(1+t^2)^2)\right]_0^1$$

$$= \pi e - \pi + 2\cdot \arctan(2) - \tfrac{1}{2}\ln(5) - \underbrace{\arctan(1)}_{\pi/4} + \tfrac{1}{2}\ln(2)$$

$$= \pi\cdot\left(e - \tfrac{5}{4}\right) + 2\cdot \arctan(2) + \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{2}{5}\right) \quad \square$$

HM3 GÜ 5

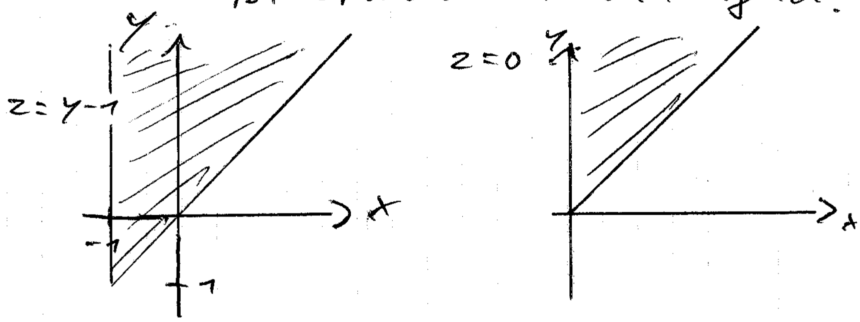
12. NOV. 2009

A18.) 1.) Ist $\int_\Gamma [\underbrace{|y-z|}_{a(x,y,z)}dx - \underbrace{|z-x|}_{b(x,y,z)}dy + \underbrace{|x-y|}_{c(x,y,z)}dz]$ wegunabhängig?

2.) Welchen Wert besitzt das Integral für $\Gamma: \gamma: [0,\pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$?

dazu:

1.) Gebiet $G := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x > y > z \right\}$ ist einfach zusammenhängend.



auf $\overline{G}$ ist $f = (a,b,c)$ wegen * C^1-Vektorfeld (d.h. stetig diff'bar)

Satz 2.4.
Das Integral ist unabh. vom Weg $\Leftrightarrow \operatorname{rot}(\underline{f}) = \underline{0}$

Berechne $\operatorname{rot}(\underline{f})$

$$\operatorname{rot}(\underline{f}) = \text{"}\nabla \times \underline{f}\text{"} = \text{"}\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\text{"}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_2 c - \partial_3 b \\ \partial_3 a - \partial_1 c \\ \partial_1 b - \partial_2 a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ -1-1 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \underline{0}$$

$\Rightarrow$ Das Integral ist nicht wegunabh.

2.) Prüfe Voraussetzung von Satz 1.2.

- γ stetig diff'bar
- $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + \cos^2(t)} = \sqrt{1+\cos^2(t)}$
  $\neq 0 \ \forall t$
- Γ ist Doppelpunktfrei, da
  $(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$ ein Halbkreis ist.

$\Rightarrow \Gamma$ ist reguläre Kurve

$f(x,y,z) = (|y-z|, +|x-z|, |y-x|)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^3$.

$\overset{\text{S. 1.2.}}{\Rightarrow} \int_\Gamma \underline{f} \cdot d\underline{\gamma}$ ex:

$$= \int_0^\pi f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^\pi \begin{pmatrix} |\sin(t) - \sin(t)| \\ -|+\cos(t) - \sin(t)| \\ |\sin(t) - \cos(t)| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^\pi [0, \underbrace{-\cos(t)|\cos(t) - \sin(t)| + \cos(t)|\sin(t) - \cos(t)|}_{=0}]\, dt$$

$$= \int_0^\pi 0\, dt = \underline{\underline{0}}$$

$\square$