Übung zu

Grundgebiete der Elektrotechnik III

WS 09/10 - Blatt 3

Aufgabe 14

Betrachtet werden zwei Punktladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen $\pm Q$ auf der z–Achse im Abstand d symmetrisch zum Ursprung (Bild 1).

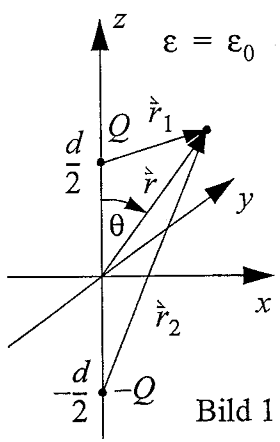


Bild 1

a) Formulieren Sie das elektrostatische Potential φ_e dieser Anordnung in Abhängigkeit von r_1 und r_2.

b) Ermitteln Sie mithilfe des Kosinussatzes $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$ die Abstände r_1 und r_2 und geben Sie deren Kehrwerte als Funktion von $1/r$ und θ an.
Verwenden Sie für die Ausdrücke $1/r_1$ und $1/r_2$ die Näherung

$$\left(1 + \frac{d}{r}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{r} \qquad \left(\text{falls } \frac{d}{r} \ll 1\right).$$

c) Bestimmen Sie das elektrostatische Potential φ_D eines Punktdipols als Grenzwert $d \to 0$ bei konstantem Dipolmoment $p = Q \cdot d$.

d) Geben Sie die Komponenten der elektrischen Feldstärke $\vec{E}_D$ durch Gradientenbildung von φ_D in Kugelkoordinaten an. Was fällt bei der Abhängigkeit von $|\vec{E}_D|$ bzw. φ_D von r auf?

Aufgabe 15

Gegeben ist die zylinderförmige Raumladungsverteilung aus Aufgabe 12 d.

a) Formulieren Sie die Poisson– und Laplace–Gleichung in einem geeigneten Koordinatensystem. Welche Terme entfallen aus Symmetriegründen?

b) Bestimmen Sie das elektrostatische Potential φ_e der Raumladungsverteilung im Innen- und Außenraum mit dem Ergebnis aus a) durch zweifache Integration. Bestimmen Sie die Integrationskonstanten so, dass $\vec{E}$ und φ_e überall stetig sind. Wählen Sie $\varphi_e = 0$ auf der z-Achse.

Aufgabe 16

Gesucht ist das elektrostatische Potential φ_e von zwei parallelen, in z–Richtung unendlich ausgedehnten Linienladungen: q_L schneidet die x-Achse bei $x = a$, $-q_L$ bei $x = -a$. Im Koordinatenursprung soll $\varphi_e = 0$ gelten.

a) Formulieren Sie φ_e in Abhängigkeit von ρ_1 und ρ_2, wobei ρ_1 und ρ_2 den jeweiligen Abstand des Aufpunktes von q_L bzw. $-q_L$ beschreiben.

HINWEIS: Das Potential **einer** Linienladung q_L in der z-Achse mit dem Bezugspunkt bei ρ_0 lautet $\varphi_e = -\frac{q_L}{2\pi\varepsilon} \cdot \ln\frac{\rho}{\rho_0}$.

b) Zeigen Sie, dass für jede Äquipotentialfläche gilt: $\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 = k^2$ mit $k = \text{const}$.

c) Formulieren Sie die Bedingung aus b) in kartesischen Koordinaten.

d) Bringen Sie die Gleichung aus c) in die Form $(x - x_0)^2 + y^2 = R^2$ und bestimmen Sie die Größen x_0 und R in Abhängigkeit von k.

e) Welche geometrische Form haben die Äquipotentialflächen dieser Anordnung?

Aufgabe 17

Betrachtet wird ein Winkelkondensator mit dem Öffnungswinkel α und Kondensatorplatten der Länge a, der Ausdehnung in z–Richtung b und dem Abstand ρ_0 vom Ursprung (Bild 2). Zwischen den Platten liegt die Spannung U an. Es sollen keine Streueffekte an den Rändern des Kondensators auftreten, d. h. im Innen- und Außenraum gilt $\vec{E} = E_\phi(\rho, \phi) \cdot \vec{e}_\phi$.

a) Bestimmen Sie $\vec{E}$ und das elektrostatische Potential φ_e in Zylinderkoordinaten im Innen- und Außenraum des Kondensators.

b) Geben Sie die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ unmittelbar ober- und unterhalb der unteren Platte an. Wie groß ist die Ladung Q auf der unteren Platte?

c) Was ergibt sich für die Kapazität C des Kondensators?

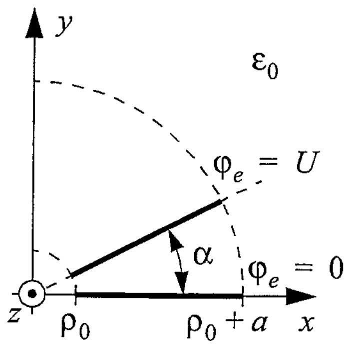


Bild 2

Aufgabe 18

Gegeben sind zwei parallele, in z–Richtung unendlich ausgedehnte Zylinderleiter mit dem Radius R und dem Achsenabstand $2x_0$, mit $x_0 > R$.

a) Für welche Parameter k_1 und k_2 in Abhängigkeit von R und x_0 stimmen die Äquipotentialflächen einer Anordnung aus zwei Linienladungen $\pm q_L$ mit den Oberflächen der Zylinderleiter überein? Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabe 16.

b) Welche elektrische Spannung U_{12} besteht zwischen den beiden Äquipotentialflächen in Abhängigkeit von q_L? Welche Ladung $\pm\Delta Q$ pro Länge Δl müssen die Zylinderleiter tragen, damit sich im Außenraum der gleiche Feldverlauf ergibt?

c) Wie groß ist der Kapazitätsbelag $C' = \Delta C/\Delta l$ der Anordnung? Verwenden Sie dazu den Ansatz $\Delta C = \Delta Q/U_{12}$.

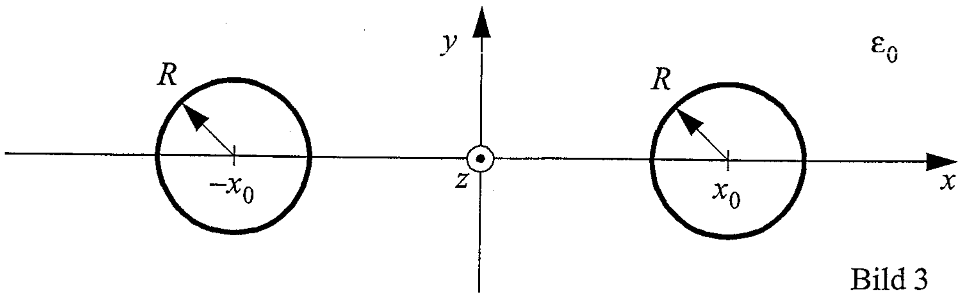


Bild 3

Aufgabe 19

Eine Leiterbahn einer integrierten Schaltung (Bild 4) mit den Abmessungen w=0.4µm, d=0.25µm verläuft im Abstand h=0.25µm über einer leitenden Ebene. Das Isoliermaterial zwischen Leiterbahn und Ebene ist SiO_2 mit $\varepsilon_r \approx 4$.

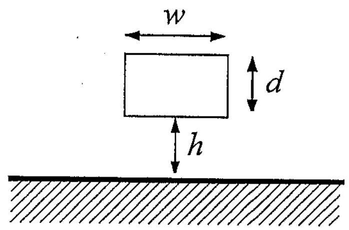


Bild 4

a) Bestimmen Sie den Kapazitätsbelag C' der Anordnung näherungsweise, indem Sie die Bodenfläche und die Seitenflächen des Leiters als Elektroden von Platten- bzw. Winkelkondensatoren zur Ebene betrachten.

Alternativ kann C' durch eine andere Näherung berechnet werden (Bild 5).

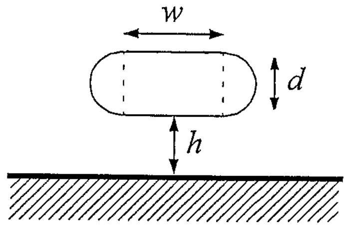


Bild 5

b) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis aus Aufgabe 18c den Kapazitätsbelag eines Zylinders mit dem Durchmesser d im Abstand h über einer Ebene.

c) Berechnen Sie C', indem Sie die Leiterbahn als Kombination einer plattenförmigen und einer zylinderförmigen Elektrode betrachten.

Aufgabe 20 (Zusatz)

Die Elektroden eines luftgefüllten Plattenkondensators mit der Fläche A im Abstand d tragen die Ladung $\pm Q$ = const. Streueffekte des elektrischen Feldes sind zu vernachlässigen.

a) Wie groß ist die im Kondensator gespeicherte elektrostatische Energie?

Bestimmen Sie die Kraft F zwischen den Platten mit der Methode der virtuellen Verschiebung.

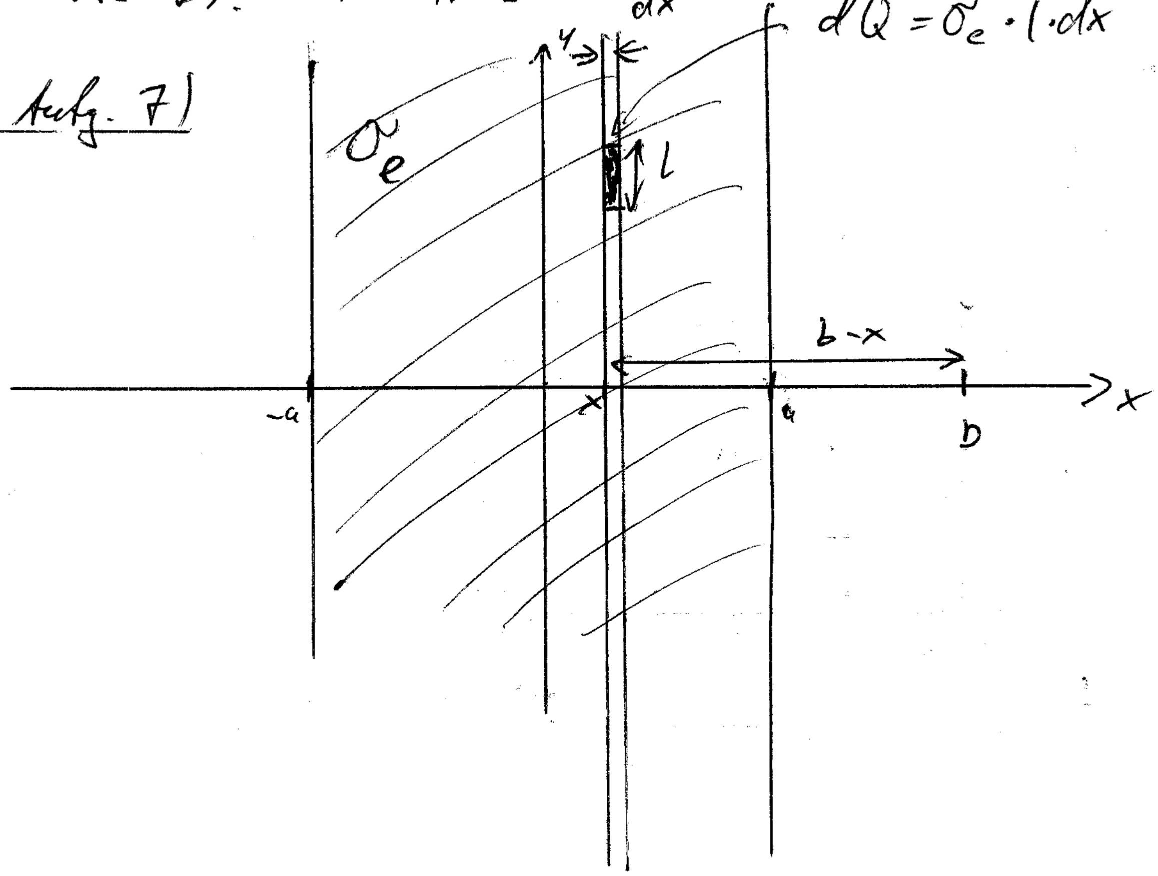
GET3 GÜ6 10. NOV. 2009

Morgen (Mittwoch): Zusatzveranstaltung „Werkzeuge der Mathematik" in der ~~Aula 1~~ diesmal im Eph. [redacted] (17:30 Uhr)

Neue Hausaufgabe: Aufg. 13
bis Di. 17.11.09

$dQ = \sigma_e \cdot l \cdot dx$

Aufg. 7)



$$dQ = \sigma_e \cdot l \cdot dx \overset{!}{=} dq_L \cdot l$$

$$\rightarrow dq_L = \sigma_e \cdot dx$$

b.) aus Vorlesung:

$$\vec{E} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \vec{e}_\varrho$$

gilt für eine Linienladung in der z-Achse

Ersetze ϱ durch $b-x$

" $\vec{e}_\varrho$ durch $\vec{e}_x$

" q_L durch dq_L

" $\vec{E}$ durch $d\vec{E}$

$$d\vec{E} = \frac{dq_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{b-x} \cdot \vec{e}_x$$ im Aufpunkt $A(b,0,0)$

c)
$$\vec{E}(b,0,0) = \int_{x=-a}^{a} dE \cdot \vec{e}_x$$

$$= \frac{\sigma_e}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{x=-a}^{a} \frac{-dx}{x-b} \cdot \vec{e}_x$$

$$= \frac{\sigma_e}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \Big[-\ln(|x-b|)\Big]_{x=-a}^{x=a} \cdot \vec{e}_x$$

$$= \frac{\sigma_e}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\left|\frac{-a-b}{a-b}\right|\right) \cdot \vec{e}_x$$

$$\overset{b>a}{=} \frac{\sigma_e}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{a+b}{b-a}\right) \cdot \vec{e}_x$$

d)
Fernfeld: $b \gg a \Leftrightarrow \frac{a}{b} \ll 1$

$$\vec{E}(b,0,0) = \frac{\sigma_e}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{1+a/b}{1-a/b}\right) \cdot \vec{e}_x$$

Hinweis: $\ln(1+x) \approx x$ für $|x| \ll 1$

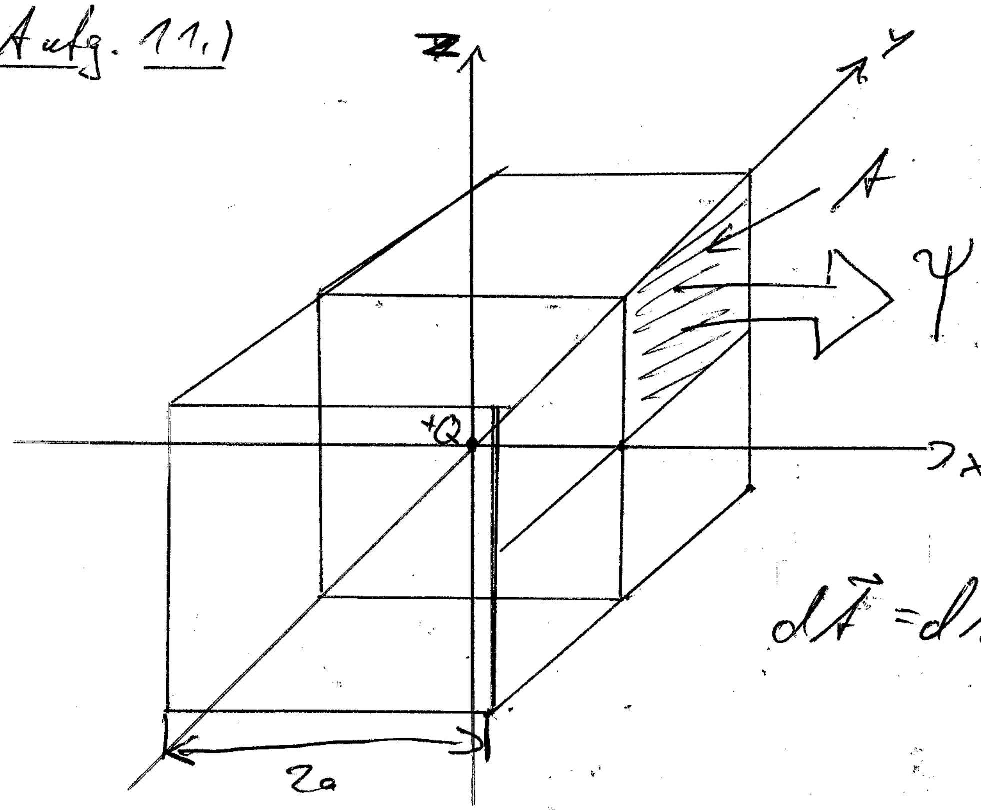
$$\vec{E}(b,0,0) \approx \frac{\sigma_e}{2\pi\varepsilon_0} \left[\frac{a}{b} - \left(-\frac{a}{b}\right)\right] \cdot \vec{e}_x$$

$$= \frac{\sigma_e \cdot 2a}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{b} \cdot \vec{e}_x$$

$$\overset{!}{=} \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{b} \cdot \vec{e}_x$$

Also $q_L = \underbrace{2a}_{\text{breite des Streifens}} \cdot \sigma_e$,

Aufg. 11.)



$d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_x$

a.) $\Psi = \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$

Wegen der Form der Fläche A ist die Berechnung von Ψ in kartesischen Koordinaten am einfachsten:

$$d\vec{A} = dy \cdot dz \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}}$$

Grenzen: $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$

$$d\Psi = \vec{D} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\vec{D} \cdot \vec{e}_x}_{D_x(x=a,\,y,\,z)} \cdot dy \cdot dz$$

$$\Psi = \frac{Q}{4\pi} \cdot \int_{y=0}^{a} \int_{z=0}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}^3} \cdot dy \cdot dz$$

Hinweis 2: Ersetze x durch z

Ersetze B^2 durch (a^2+y^2)

$$\Psi = \frac{Q}{4\pi} \cdot \int_{y=0}^{a} a \left[\frac{z}{(a^2+y^2)\cdot\sqrt{a^2+y^2+z^2}} \right]_{z=0}^{z=a} \cdot dy$$

$$\Psi = \frac{Q \cdot a^2}{4\pi} \cdot \int_{y=0}^{a} \frac{1}{(a^2+y^2)\sqrt{2a^2+y^2}} \cdot dy$$

Hinweis 3: Ersetze x durch y

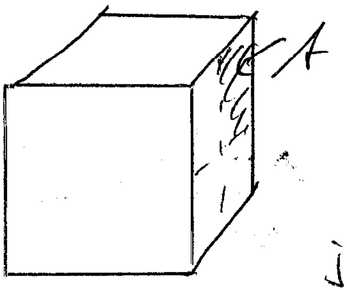
Ersetze B^2 durch a^2

$$\Psi = \frac{Q \cdot a^{2}}{4\pi} \cdot \frac{1}{2a^2} \left[\arctan\left(\frac{y \cdot \sqrt{y^2+2a^2}}{a^2} \right) \right]_{y=0}^{y=a}$$

$$= \frac{Q}{8\pi} \cdot \Bigg[\underbrace{\arctan\left(\frac{a \cdot \sqrt{3a^2}}{a^2} \right)}_{\substack{\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \\ \text{(mit Hinweis 1)}}} - \underbrace{\arctan(0)}_{=0} \Bigg]$$

$$\rightarrow \Psi = \underline{\underline{\frac{Q}{24}}}$$

b.)



Wegen der Kugelsymmetrie von $\vec{D}(\vec{r})$ wird jede der vier Teilflächen bei jeder der 6 Würfelseiten vom gleichen Fluss Ψ durchsetzt:

$$\Psi_i = \frac{Q}{24} \quad \text{für } i = 1 \ldots 24$$

$$\Rightarrow \Psi_{ges} = \sum_{i=1}^{24} \Psi_i = \underline{\underline{Q}}$$

GET3 GÜ6

10. NOV. 2009

Aufg. 12.)

a) gegeben: kugelförmige, homogene Raumladungsverteilung ρ_e mit dem Radius a.

Gesucht: $\vec{D}(\vec{r})$ bzw $\vec{E}(\vec{r})$

für $|\vec{r}| > a$

an jeden Ort $(\vec{r})$: 3 skalare Unbekannte

Ansatz: $\oint\!\!\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho_e \cdot dV$

A berandet V

-> eine skalare Gleichung

=> Es sind zusätzliche Symmetrie-Überlegungen erforderlich

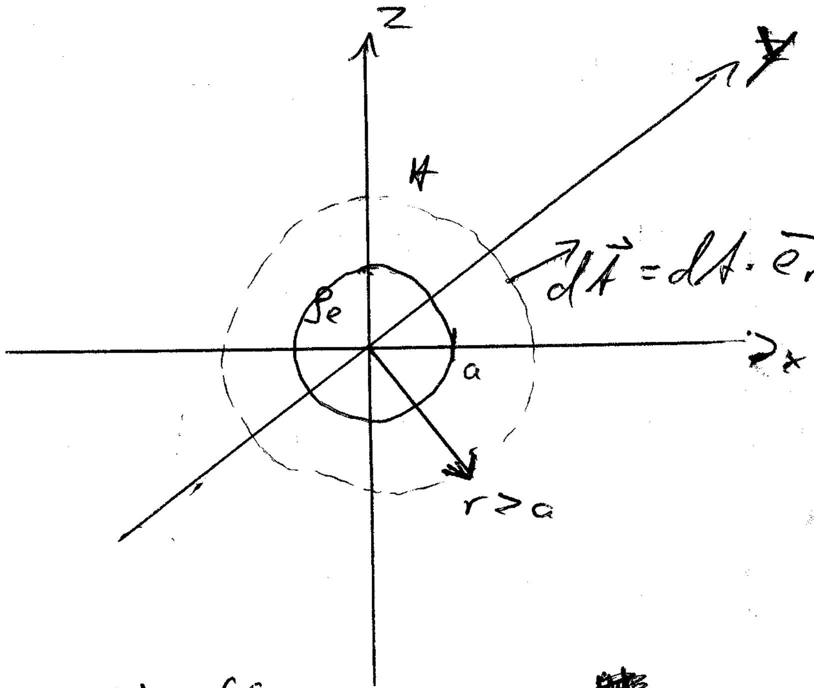
$\rho_e(\vec{r})$ ist kugelsymmetrisch => $\rho_e(r)$ bzw $\rho_e = \text{const.}$

=> $\vec{D}(\vec{r})$ ist auch kugelsymmetrisch

$$\vec{D}(\vec{r}) = D_r(r, \cancel{\theta}, \cancel{\phi}) \cdot \vec{e}_r \cancel{+ D_\theta(r,\theta,\phi) \cdot \vec{e}_\theta} \cancel{+ D_\phi(r,\theta,\phi) \cdot \vec{e}_\phi}$$

$\vec{D}(\vec{r}) = D_r(r) \cdot \vec{e_r}$

eine skalare Unbekannte am Ort $(\vec{r})$



$$\oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \oiint_A D_r(r) \cdot dA = D_r(r) \oiint_A dA$$

$$\oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{ein} = \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \rho_e$$

$$= D_r(r) \cdot \oiint_A dA = D_r(r) \cdot 4\pi r^2$$

$$\rightarrow D_r(r) = \frac{a^3 \cdot \rho_e}{3 r^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot D_r(r) \cdot \vec{e_r} = \frac{a^3 \cdot \rho_e}{3 \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e_r}$$

für $|\vec{r}| > a$

jetzt Aufg. 11 mit Gauß'schem Satz der Elektrostatik.

GET3 GÜ6

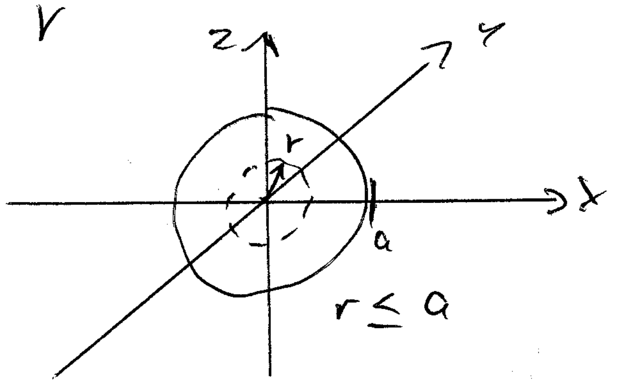
$$\Psi_{ges} = \oiint_{A_{Würfel}} \underbrace{\vec{D} \cdot d\vec{A}}_{= |\vec{D}| \cdot dA \cdot \cos(\alpha)} = Q_{ein} = Q$$

$$\Psi_{ges} = 24 \cdot \Psi_A \rightarrow \Psi_A = \frac{\Psi_{ges}}{24}$$

12b.) Jetzt: Feld der Kugel für $|\vec{r}| \leq a$

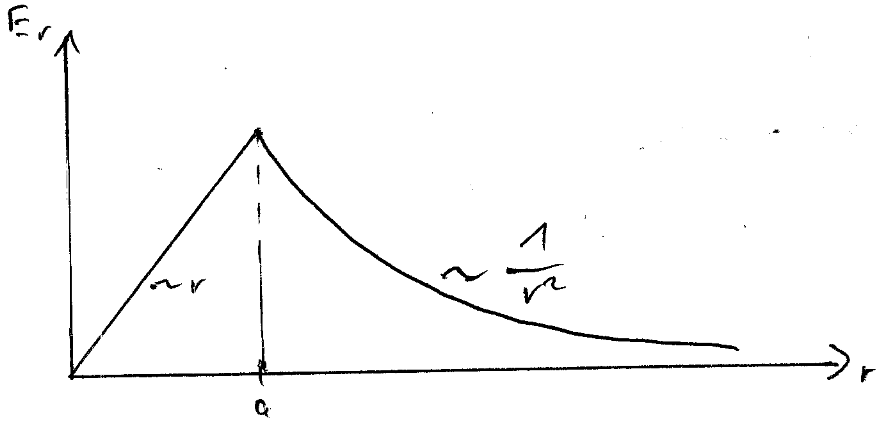
$$\oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = D_r(r) \cdot 4\pi r^2$$

$$= \iiint_V \varrho_e \cdot dV = \varrho_e \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

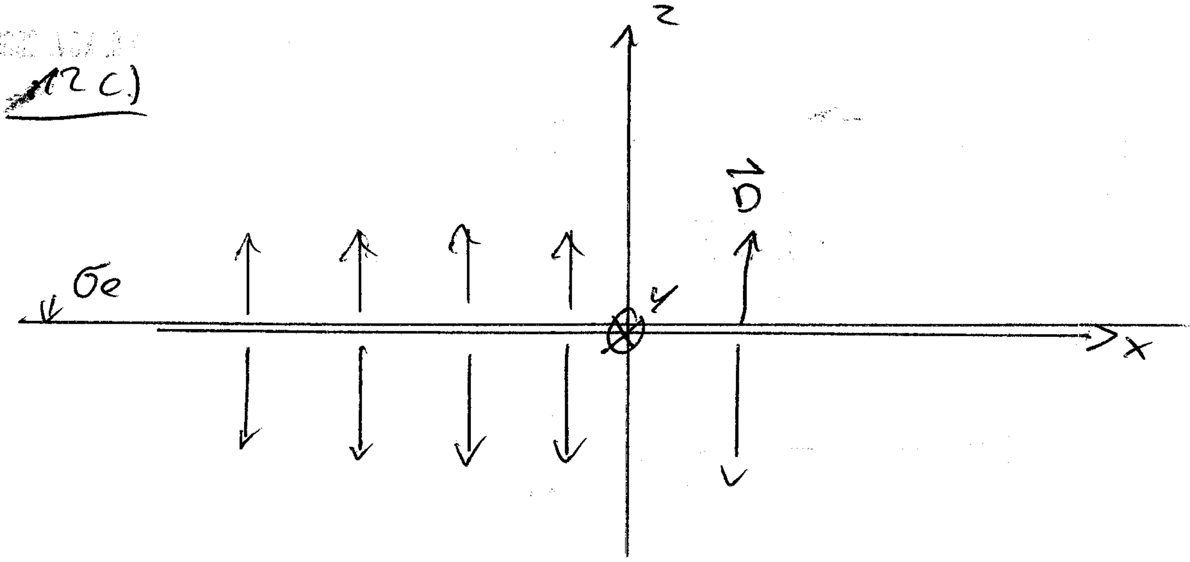


$$\rightarrow D_r(r) = \frac{r \cdot \varrho_e}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{r \cdot \varrho_e}{3 \varepsilon_0} \cdot \vec{e}_r$$



12 c)



Die Ladungsverteilung und damit auch die elektrische Ladungsdichte $\vec D$ sind invariant bzgl. einer Verschiebung in x- oder y-Richtung.

$\Rightarrow \vec D(\vec r) \neq f(x,y)$

auch invariant bezgl. einer Rotation um die z-Achse (oder um eine zur z-Achse parallele Achse)

$\rightarrow D_x = 0 \;,\; D_y = 0$

$\Rightarrow \vec D(\vec r) = D_z(z) \cdot \vec e_z$

Die Ladungsverteilung ist symmetrisch zur x-y-Ebene

$\rightarrow D_z(-z) = -D_z(z)$

(ungerade Funktion).