04. NOV. 2009

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. Christof Melcher

Übungen zur Höheren Mathematik 3
Serie 04 vom 02. November 2009

Teil A

Aufgabe A11 Gegeben sei das ebene Gebiet

$$G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < y < 2, \quad y < x < 4 - y\right\}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_G xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Aufgabe A12 Berechnen Sie mittels des Prinzips von Cavalieri in Abhängigkeit von $a, b > 0$ den Flächeninhalt der Ellipse

$$E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$

Aufgabe A13 Die Funktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) := \int_x^1 y \sin\left(\frac{x}{y}\right) \mathrm{d}y\,.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe A14 Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der von den Ebenen $z = 1 + x$, $z = -1 - x$ und dem Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ begrenzt wird und den Ursprung enthält.

Teil B

Aufgabe B14 Gegeben sei das ebene Gebiet, das von den Kurven $y = x^2$ und $x = y^2$ begrenzt wird und den Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ enthält. Skizzieren Sie G in der Ebene, und berechnen Sie das Integral

$$\int_G \sqrt{x}\, dx\, dy .$$

Aufgabe B15 Die Funktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) := \int_{\sqrt{x}}^{1} x \sin(y^2 - x) + \cos(y^2 - x)\, dy .$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 F(x)\, dx .$$

Aufgabe B16 Bestimmen Sie das Volumen des Körpers

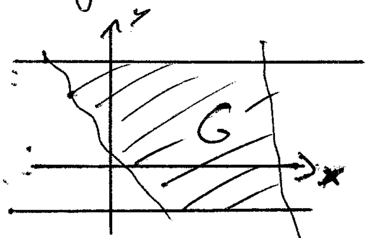
$$K := \{(x, y, z) \,|\, y < x < z < 2x + 3 < 3\} .$$

Aufgabe B17 Berechnen Sie mittels des Cavalieri-Prinzips das Volumen der Kugel

$$K := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\} .$$

HM3 GÜ 4

Ebene Gebietsintegrale können wir mit Hilfe von Satz 5.10 berechnen, wenn das Gebiet G von der speziellen Form $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c<y<d, a(y)<x<b(y)\}$ für stetige Funktionen $a, b : [c, d] \to \mathbb{R}$

Skizze: 

Dann gilt für $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ stetig:

$$\int_G f(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{Satz 5.10}}{=} \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

<u>A11.)</u> $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1<y<2, y<x<4-y\}$

Berechne $\int_G xy\,dx\,dy$

Mit Notation von Satz 5.10: $c = 1,\ d = 2,\ a(y) = y,\ b(y) = 4-y$

$f(x,y) = xy$

a, b stetig auf $[1;2]$; f stetig auf $\overline{G}$

$$\Rightarrow \int_G xy\,dx\,dy = \int_1^2 \int_y^{4-y} xy\,dx\,dy$$

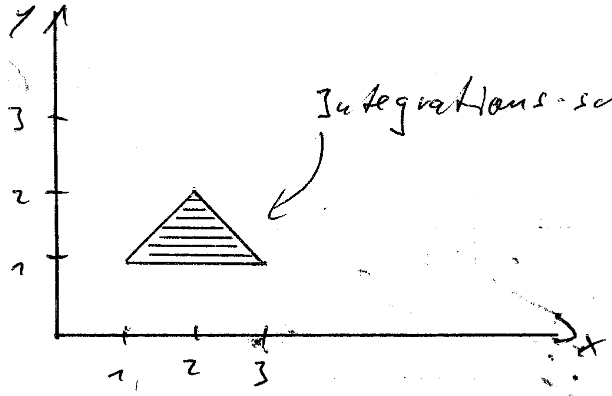
$$= \int_1^2 \left[y\tfrac{1}{2}x^2\right]_y^{4-y} dy = \int_1^2 \tfrac{1}{2}y\left((4-y)^2 - y^2\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 y\left(16 - 8y \cancel{+y^2} \cancel{-y^2}\right) dy$$

$$= \int_1^2 8y - 4y^2 \, dy = 4y^2 - \frac{4}{3}y^3 \Big|_1^2$$

$$\underline{\underline{= \frac{8}{3}}}$$

Skizze:



A12) $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$

Wegen $\frac{y^2}{b^2} \geq 0$ ist $1 \geq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq \frac{x^2}{a^2}$,

also $x^2 \leq a^2$ bzw. $|x| \leq a$

Für festes x mit $-a \leq x \leq a$ ist $\frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2}$

bzw. $|y| \leq b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

Den Flächeninhalt der Ellipse erhalten wir durch

$$F_E = \int_E 1 \, dx dy = \int_{x=-a}^{a} \int_{y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 1 \, \cancel{dy} \cancel{dx}$$

$$= 2b \int_{x=-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, dx \overset{\sin(t) := \frac{x}{a}}{=} 2b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cdot a \cdot \cos(t) \, dt$$

$$= 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) \, dt = \cancel{2}ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{\cancel{2}} \, dt$$

AM3 GÜ 4

04. NOV. 2009

$$= a \cdot b \cdot \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= a \cdot b \cdot \left(\pi + \frac{1}{2} \left(\sin(\pi) - \sin(-\pi) \right) \right)$$

$$\underline{\underline{= a \cdot b \cdot \pi}}$$

$$E := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

<u>A13.)</u> $F: [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$F(x) := \int_x^1 y \cdot \sin\left(\frac{x}{y}\right) dy$$

Berechne $\int_0^1 F(x)\,dx =: J$

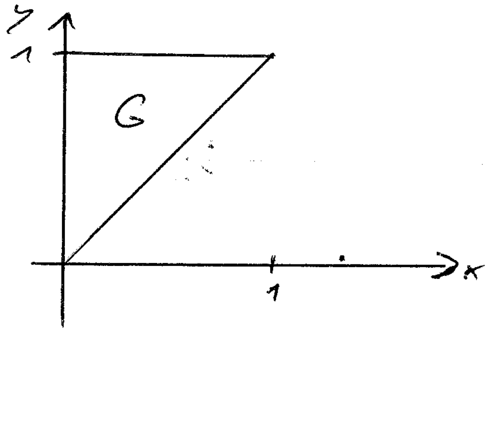
$$J = \int_0^1 \int_x^1 y \cdot \sin\left(\frac{x}{y}\right) dy\, dx$$

$$= \int_G f(x,y)\, dy\, dx$$

$f(x,y) = y \cdot \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ und

$G = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1, x < y < 1$

<u>Skizze:</u>



Satz 5.10 ist anwendbar, da $f(x,y)$ stetig fortsetzbar auf $\overline{G}$ ist.

$$\Rightarrow J = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y} f(x,y) \underbrace{dx\, dy}$$

andere Integrationsreihenfolge als im Ausgangsintegral

$$= \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{y} y \cdot \sin\left(\frac{x}{y}\right) dx\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{1} \left[y\left(-\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right) y \right]_0^y dy$$

$$= -\int_0^1 y^2 \cdot (\cos(1) - \cos(0))\, dy$$

$$= -(\cos(1) - 1) \int_0^1 y^2\, dy = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot (1 - \cos(1))}}$$

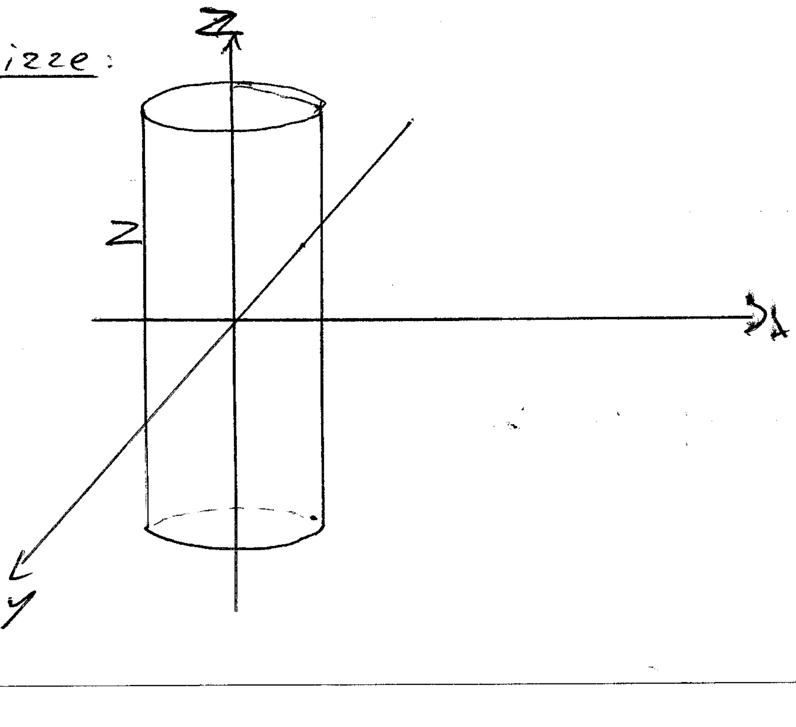
A14.)

$E_1 := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 + x \}$

$E_2 := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -1 - x \}$

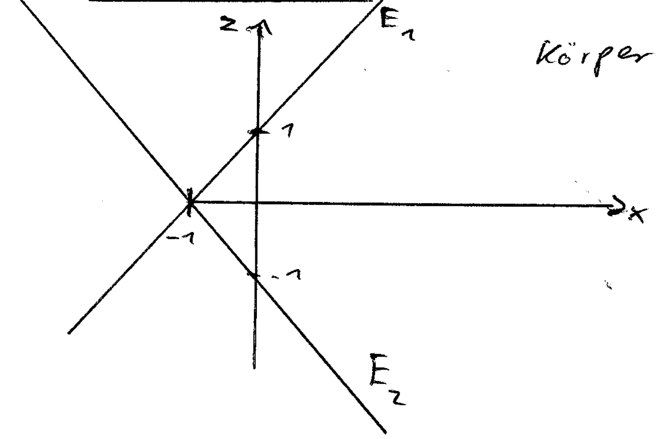
$Z := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$

Skizze:



AM3 GÜ4 04. NOV. 2009

Seitenansicht



Körper $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2<1, -1-x<z<1+x\}$

$x^2+y^2<1 \Leftrightarrow |y| < \sqrt{1-x^2}$, also

$-\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}$

Zusammen:

$K = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid -1 < x < 1, -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}, -1-x<z<1+x\}$

$$V_K = \int_K 1 \, dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=-1}^{1} \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{z=-1-x}^{1+x} 1 \, dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2+2x \, dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (2+2x)\cdot 2\sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$= 4\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx + 4\int_{-1}^{1} x\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 8\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx + \underbrace{4\cdot\left[-\tfrac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_{-1}^{1}}_{=0}$$

$$\overset{x:=\sin(t)}{=} 8\cdot\int_{0}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2(t)}\,\cos(t)\,dt$$

$$= 8 \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\, dt = 8 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt$$

$$= 4 \left[t + \tfrac{1}{2}\sin(2t) \right]_0^{\pi/2} = 4 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\sin(\pi)}{2} = \underline{\underline{2\pi}}$$