

$$\rho_e(\vec{r}) = \rho_e(r) = \begin{cases} \rho_{e0} \cdot \frac{r^2}{a^2} & \text{für } 0 \leq r \leq a \\ 0 & \text{für } r > a \end{cases}$$

- Bereich I:  $0 \leq r < a$ :

$$Q_{\text{ein}} = 4\pi \cdot \int_{r'=0}^r \rho_{e0} \cdot \frac{r'^2}{a^2} \cdot r'^2 dr' = \frac{4\pi}{a^2} \rho_{e0} \cdot \left[ \frac{r'^5}{5} \right]_{r'=0}^{r'=r} \\ = \frac{4\pi}{5a^2} \rho_{e0} \cdot r^5$$

$$E_I(r) = \frac{Q_{\text{ein}}}{4\pi \underbrace{\epsilon(r)}_{4 \cdot \epsilon_0} \cdot r^2} = \frac{\rho_{e0}}{20 \epsilon_0 a^2} \cdot r^3$$

- Bereich II:  $a < r < b$

$$Q_{\text{ein}} = Q_{\text{ein}}|_{r=a} = \frac{4\pi}{5a^2} \rho_{e0} \cdot a^5 = \frac{4\pi}{5} \rho_{e0} \cdot a^3$$

$$E_{II}(r) = \frac{Q_{\text{ein}}}{4\pi \underbrace{\epsilon(r)}_{k \cdot r \cdot \epsilon_0} \cdot r^2} = \frac{\rho_{e0} \cdot a^3}{5 \cdot k \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3}$$

- Bereich III:  $r > b$

$$Q_{\text{ein}} = Q_{\text{ein}}|_{r=a} = \frac{4\pi}{5} \rho_{e0} \cdot a^3$$

$$E_{III}(r) = \frac{Q_{\text{ein}}}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_{e0} \cdot a^3}{5 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Damit

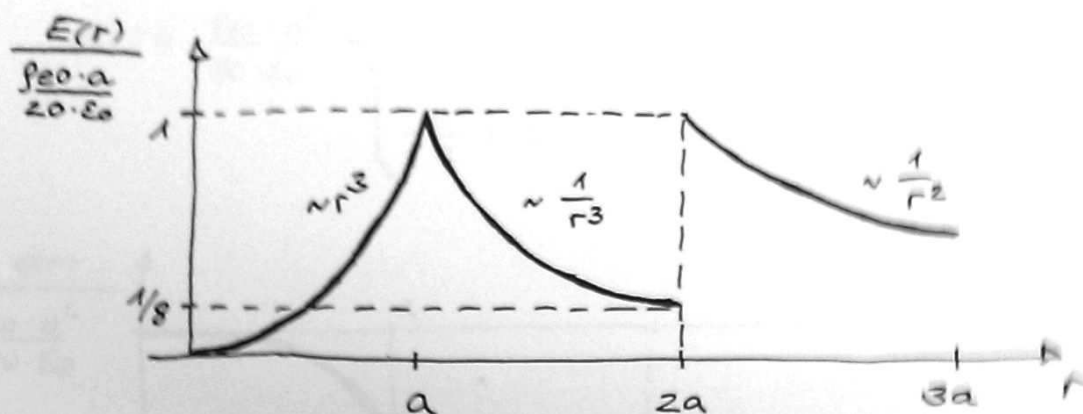
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_{e0} \cdot a^3}{5 \cdot \epsilon_0} \cdot \vec{e}_r \cdot \begin{cases} \frac{r^3}{4 \cdot a^5} & \text{für } 0 \leq r < a \\ 1/k \cdot r^3 & \text{für } a < r < b \\ 1/r^2 & \text{für } r > b \end{cases}$$

b) Stetigkeit für  $E(r)$  bei  $r=a$ :

$$E_I(r \rightarrow a) \stackrel{!}{=} E_{II}(r \rightarrow a)$$

$$\text{also } \left. \frac{r^3}{4 \cdot a^6} \right|_{r=a} \stackrel{!}{=} \left. \frac{1}{k \cdot r^3} \right|_{r=a}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k = \frac{4}{a}}}$$



c) Wahl des Bezugspunktes und -potentials:  $\varphi_0 := \varphi(r=0) = 0$

- Bereich I:  $0 \leq r \leq a$

$$\begin{aligned} \varphi_I(r) &= \varphi_0 - \int_{r'=0}^r E_I(r') dr' = -\frac{\rho_0}{20 \epsilon_0 a^2} \cdot \left[ \frac{r'^4}{4} \right]_{r'=0}^{r'=r} \\ &= -\frac{\rho_0}{80 \epsilon_0 a^2} r^4 \end{aligned}$$

- Bereich II:  $a < r \leq b$

$$\begin{aligned} \varphi_{II}(r) &= \varphi_I(r=a) - \int_{r'=a}^r E_{II}(r') \cdot dr' \\ &= -\frac{\rho_0 \cdot a^2}{80 \cdot \epsilon_0} - \frac{\rho_0 \cdot a^4}{20 \cdot \epsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{2 r'^2} \right]_{r'=a}^{r'=r} \\ &= -3 \cdot \frac{\rho_0 \cdot a^2}{80 \cdot \epsilon_0} + \frac{\rho_0 \cdot a^4}{40 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

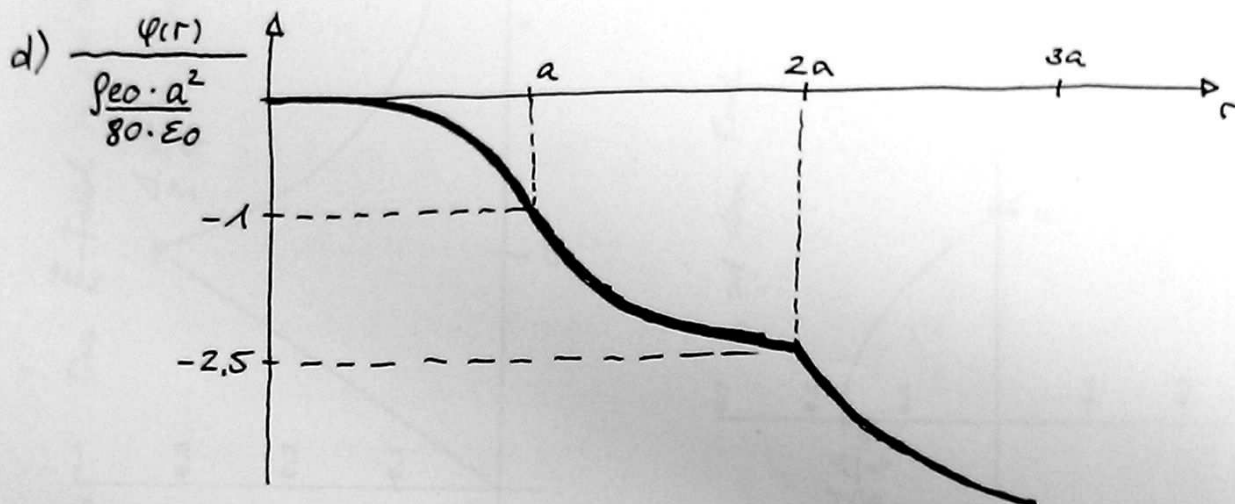
- Bereich III:  $r > b$

$$\varphi_{III}(r) = \varphi_{II}(r=b) - \int_{r'=2a}^r E_{III}(r') dr' =$$

$$= -\frac{1}{32} \frac{\rho_{e0} \cdot a^2}{\epsilon_0} - \frac{\rho_{e0} \cdot a^3}{5 \cdot \epsilon_0} \cdot \left[ -\frac{1}{r^1} \right]_{r'=2a}^{r'=r} = -\frac{21}{160} \cdot \frac{\rho_{e0} \cdot a^2}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{e0} \cdot a^3}{5 \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Damit

$$\varphi(r) = \frac{\rho_{e0} \cdot a^2}{80 \cdot \epsilon_0} \cdot \begin{cases} -\frac{r^4}{a^4} & \text{für } 0 \leq r \leq a \\ -3 + 2 \cdot \frac{a^2}{r^2} & \text{für } a < r \leq b = 2a \\ -\frac{21}{2} + \frac{16a}{r} & \text{für } r > b = 2a \end{cases}$$



e) Ersatz-Punktladung im Zentrum der Anordnung:

$$Q = Q_{\text{ein}}|_{r=a} = \frac{4\pi}{5} \rho_{e0} \cdot a^3$$

f) Anmerkung:  $\nabla \varphi = \nabla \varphi = 0$ ,  $\nabla r(r) = \epsilon(r) \cdot E(r)$

- Bereich I:  $0 \leq r < a$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\epsilon(r) \cdot E(r) \cdot \vec{e}_r) &= 4 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\rho_{e0}}{20 \epsilon_0 a^2} \cdot \underbrace{\operatorname{div}(r^3 \cdot \vec{e}_r)}_{= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r^5) = 5 \cdot r^2} = \frac{\rho_{e0}}{a^2} \cdot r^2 = \rho_e(r) \quad \checkmark \end{aligned}$$

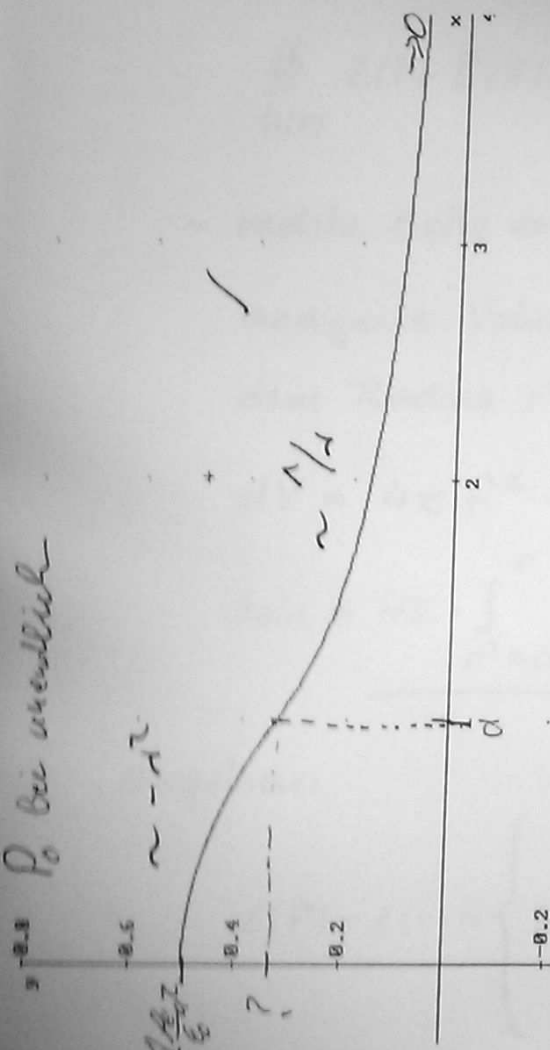
- Bereich II:  $a < r < b$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\epsilon(r) \cdot E(r) \cdot \vec{e}_r) &= k \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\rho_{e0} \cdot a^3}{5 \cdot k \cdot \epsilon_0} \cdot \underbrace{\operatorname{div}\left(r \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \vec{e}_r\right)}_{= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(1) = 0} = 0 = \rho_e(r) \quad \checkmark \end{aligned}$$

- Bereich III:  $r > b$

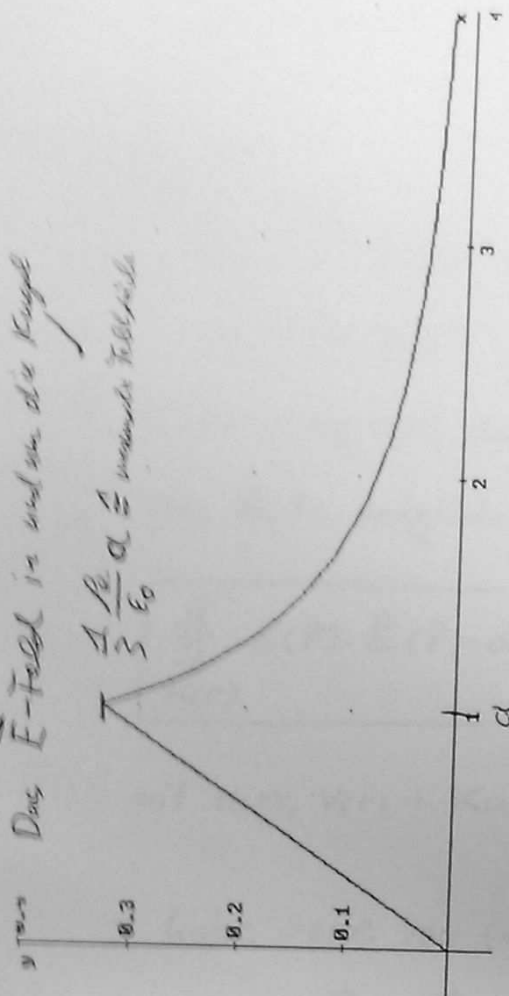
$$\operatorname{div}(\epsilon(r) \cdot E(r) \cdot \vec{e}_r) = \epsilon_0 \cdot \frac{\rho_{e0} \cdot a^3}{5 \cdot \epsilon_0} \cdot \operatorname{div}\left(\frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r\right) = 0 = \rho_e(r) \quad \checkmark$$

$P_0$  bei unendlich

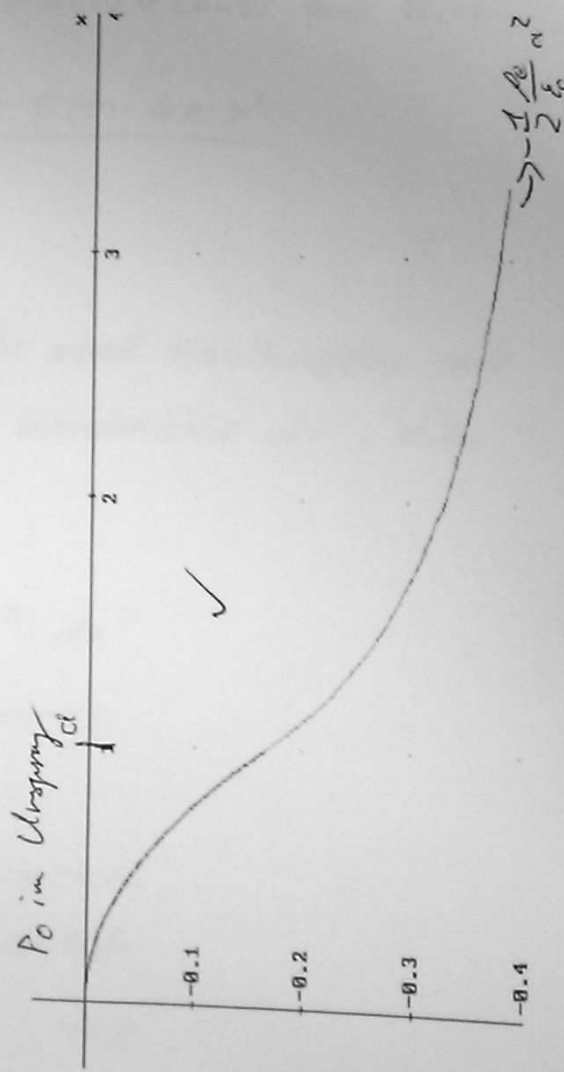


Das  $\vec{E}$ -Feld in und um die Kugel

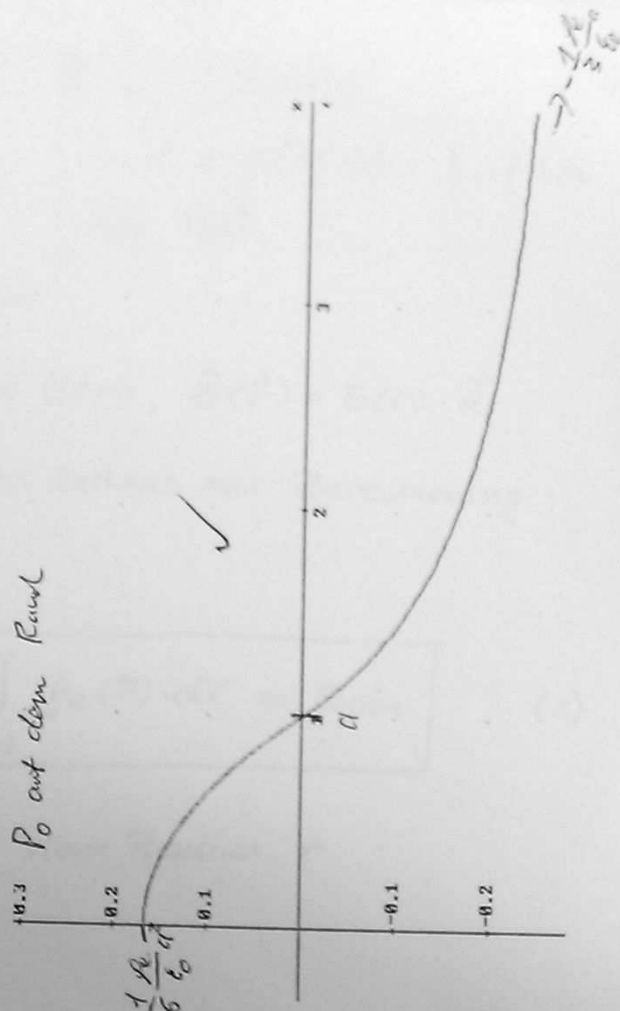
$$\frac{1}{3} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \alpha \hat{z} \text{ innerhalb Kugel}$$



$P_0$  im Ursprung



$P_0$  auf dem Rand



Aufg. 1

a) Wegen der Kugelsymmetrie

$$\rho_e(\vec{r}) = \rho_e(r), \quad \epsilon(\vec{r}) = \epsilon(r), \quad \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \vec{e}_r$$

Anwendung des Gaußschen Satzes zur Berechnung von  $\vec{E}(\vec{r})$  möglich:

$$\oint_{H(r)} \epsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \iiint_{V(r)} \rho_e(\vec{r}) \cdot dV = Q_{\text{ein}} \quad (1)$$

mit  $H(r)$ ,  $V(r)$ : Kugel mit dem Radius  $r$

- linke Seite von (1):

Wegen  $\vec{E} \parallel d\vec{A}$  und  $\epsilon(r) \cdot E(r) = \text{const}$  auf  $H(r)$

$$\oint_{H(r)} \epsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \underline{\epsilon(r) \cdot E(r) \cdot 4\pi r^2}$$

- rechte Seite von (1):

Geeignete Volumenelemente sind Hohlkugeln mit dem Radius  $r'$  und der Wandsdicke  $dr'$ , d.h.

$$dV = 4\pi r'^2 \cdot dr'$$

$$Q_{\text{ein}} = \underline{4\pi \cdot \int_{r'=0}^r \rho_e(r') \cdot r'^2 \cdot dr'}$$

Gegeben:

$$\epsilon(\vec{r}) = \epsilon(r) = \begin{cases} 4 \cdot \epsilon_0 & \text{für } 0 \leq r \leq a \\ k \cdot r \cdot \epsilon_0 & \text{für } a < r \leq b \\ \epsilon_0 & \text{für } r > b \end{cases}$$