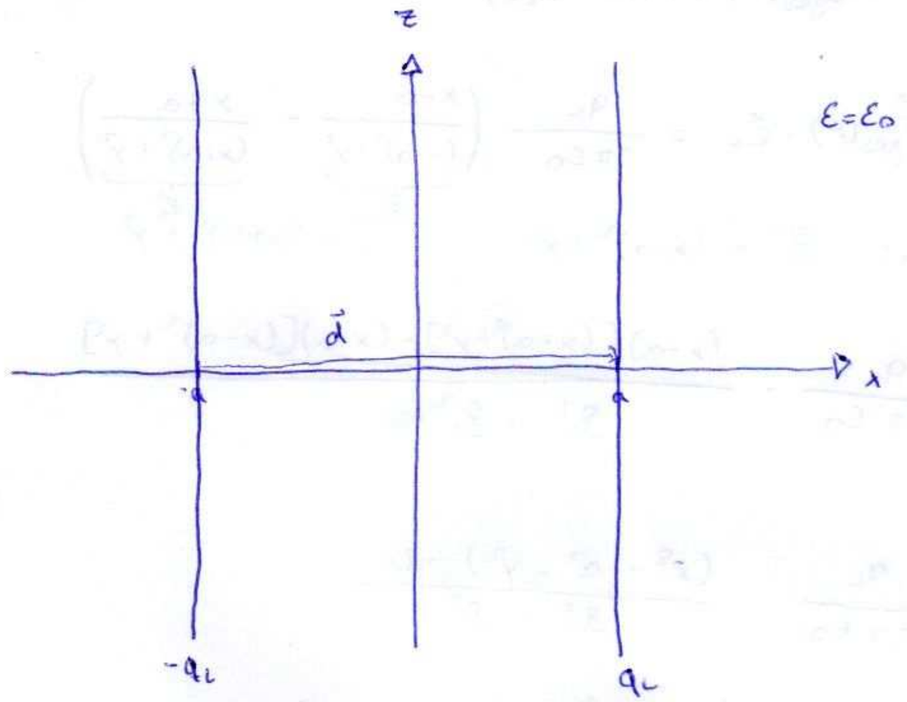
ET 3 (Ü) 3.11.09

Aufg. 9



Liniendipolmoment $\vec{p}_L = q_L \cdot \vec{d} \overset{!}{=} \text{const.}$

Feld einer Linienladung q_L in der z-Achse in Zylinderkoordinaten

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_\rho}{\rho}$$

Nur, wenn $q_L = \text{const}$ Linien unendlich + gerade und in der z-Achse liegt

Hier: zwei Linienladung parallel zur z-Achse, sind verschoben um $\pm a \cdot \vec{e}_x$

! Zylinderkoordinaten ungeeignet

Umwandlung in kartesische Koordinaten:

eine Linienladung in der z-Achse:

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\rho\vec{e}_\rho}{\rho^2} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x\cdot\vec{e}_x + y\cdot\vec{e}_y}{x^2+y^2}$$

Damit rechte Linienladung:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x-a)\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{(x-a)^2 + y^2}$$

zur Erinnerung: $\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q$

Entsprechend linke Linienladung:

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{-q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x+a)\cdot\vec{e}_x + y\cdot\vec{e}_y}{(x+a)^2 + y^2}$$

Superposition: $\vec{E}_{ges}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})$

$$E_{ges,x}(\vec{r}) = \vec{E}_{ges}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_x = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x-a}{\underbrace{(x-a)^2+y^2}_{\rho_1^2}} - \frac{x+a}{\underbrace{(x+a)^2+y^2}_{\rho_2^2}}\right)$$

Abkürzungen: $\rho_1^2 = (x-a)^2+y^2$ $\quad \rho_2^2 = (x+a)^2+y^2$

$$E_{ges,x}(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x-a)\left[(x+a)^2+y^2\right] - (x+a)\left[(x-a)^2+y^2\right]}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

$$= \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \frac{(x^2-a^2-y^2)\cdot 2a}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

Abkürzung: $p_L = q_L \cdot d = q_L \cdot 2a$

$$\rightarrow E_{ges,x}(\vec{r}) = \frac{p_L}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x^2-a^2-y^2}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

"hätte auch wie die Sadisten in den Mathe Vorlesungen ρ oder η nehmen können"

$$E_{ges,y}(\vec{r}) = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{y}{(x-a)^2+y^2} - \frac{y}{(x+a)^2+y^2}\right]$$

$$= \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{y\left[(x+a)^2+y^2 - (x-a)^2 - y^2\right]}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{y \cdot 4x \cdot a}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

$$= \frac{p_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2xy}{\rho_1^2 \cdot \rho_2^2}$$

Jetzt Grenzübergang: $p_L = \text{const} \quad q_L \to \infty \quad d \to 0 \quad a \to 0$

$$\lim_{a\to 0} \rho_1^2 = x^2+y^2$$

$$\lim_{a\to 0} \rho_2^2 = x^2+y^2$$

$$\rightarrow \lim_{a\to 0} E_{ges,x}(\vec{r}) = \frac{p_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

[...]

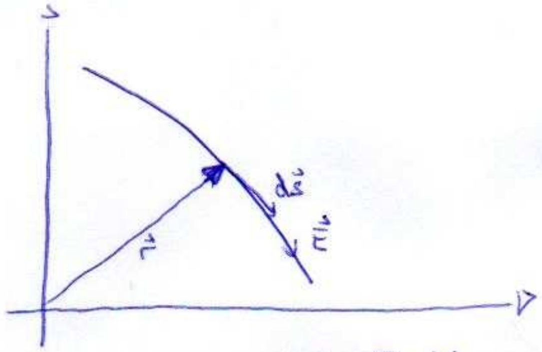
$$\rightarrow \lim_{a \to 0} E_{ges,y}(\vec{r}) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\rightarrow E_{ges}(\vec{r}) = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x^2-y^2)\vec{e}_x + 2xy\vec{e}_y}{(x^2+y^2)^2}$$

Aufg. 10

Vorbemerkung:

Die DGL $E_\phi \cdot d\rho = \rho \cdot d\phi \cdot E_\rho$ beschreibt den Weg einer Feldlinie über die Richtung von $d\vec{s}$



Ebenes ~~Problem~~ ~~mit~~ Problem in kartesischen Koordinaten:

$$d\vec{s} = dx \cdot \vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + \underbrace{\cancel{dz \cdot \vec{e}_z}}_{=0}$$

$d\vec{s} \uparrow\uparrow \vec{E}$ (gilt für jeden Punkt auf der Feldlinie)

$\rightarrow d\vec{s} = \alpha \cdot \vec{E}(\vec{r})$

mit $\alpha(\vec{r}) > 0$

$\rightarrow d\vec{s} \times \vec{E}(\vec{r}) \overset{!}{=} 0$

$\rightarrow (dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y) \times (E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y)$

$\rightarrow (dx \cdot E_y - dy \cdot E_x) \cdot \vec{e}_z \overset{!}{=} 0$

$\rightarrow dx \cdot E_y \overset{!}{=} dy \cdot E_x$

oder $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} \quad \left(= \frac{dz}{E_z} \right)$

in Zylinderkoordinaten:

Wegelement $d\vec{s} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot d\phi \cdot \vec{e}_\phi + \cancel{dz \cdot \vec{e}_z}$

$\overset{!}{=} \alpha \cdot (E_\rho \cdot \vec{e}_\rho + E_\phi \cdot \vec{e}_\phi + \cancel{E_z \cdot \vec{e}_z})$

Komponentenvergleich:

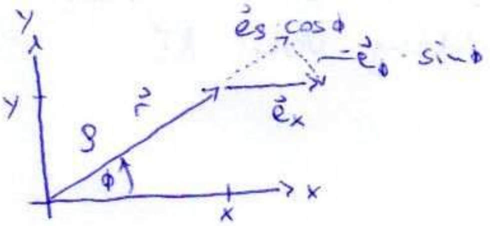
$$\alpha = \frac{d\varrho}{E_\varrho} = \frac{\varrho\, d\phi}{E_\phi}$$

$$\rightarrow E_\phi\, d\varrho = \varrho\, d\phi\, E_\varrho$$

Aufg. 10

a) Ersetze $\vec{e}_x, \vec{e}_y, x, y$

durch $\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\phi, \varrho, \phi$



in der x-y-Ebene : $|\vec{r}| = \varrho$

$$x = \varrho \cdot \cos\phi = \varrho \cdot \frac{x}{\varrho}$$

$$y = \varrho \cdot \sin\phi = \varrho \cdot \frac{y}{\varrho}$$

$$x^2 + y^2 = \varrho^2$$

$$\vec{e}_x = \vec{e}_\varrho \cdot \cos\phi - \vec{e}_\phi \cdot \sin\phi$$

$$\vec{e}_y = \vec{e}_\varrho \cdot \sin\phi + \vec{e}_\phi \cos\phi$$

$$\vec{E} = \frac{p_L}{2\pi \varepsilon_0 \cdot \varrho^4} \cdot \Big[(\varrho^2 \cos^2\phi - \varrho^2 \sin^2\phi)(\cos\phi\, \vec{e}_\varrho - \sin\phi\, \vec{e}_\phi) + 2\varrho^2 \cos\phi \cdot \sin\phi \cdot (\sin\phi \cdot \vec{e}_\varrho + \cos\phi \cdot \vec{e}_\phi) \Big]$$

$$= \frac{p_L}{2\pi \varepsilon_0 \cdot \varrho^2} \Big[(\cos^3\phi - \underline{\sin^2\phi \cos\phi} + \underline{2\cos\phi \sin^2\phi})\, \vec{e}_\varrho + (-\underline{\cos^2\phi \sin\phi} + \sin^3\phi + \underline{2\cos^2\phi \sin\phi})\, \vec{e}_\phi \Big]$$

$$= \frac{p_L}{2\pi \varepsilon_0\, \varrho^2} \Big[\underbrace{(\cos^3\phi + \cos\phi \cdot \sin^2\phi)}_{\cos\phi \cdot \underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{=1}} \cdot \vec{e}_\varrho + \underbrace{(\sin^3\phi + \cos^2\phi \cdot \sin\phi)}_{\sin\phi \cdot \underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{=1}} \vec{e}_\phi \Big]$$

$$\vec{E} = \frac{p_L}{2\pi \varepsilon_0 \varrho^2} \cdot \left[\cos\phi \cdot \vec{e}_\varrho + \sin\phi \cdot \vec{e}_\phi \right]$$

b) Die DGL enthält E_ρ und E_ϕ: einsetzen

$$E_\phi \cdot d\rho = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sin\phi}{\rho^2}\, d\rho \overset{!}{=}$$

$$E_\rho \cdot \cancel{d}\rho \cdot d\phi = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\cos\phi}{\rho}\, d\phi \qquad (\rho > 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin\phi}{\rho^2}\, d\rho = \frac{\cos\phi}{\rho}\, d\phi$$

Trennung der Variablen:

$$\frac{1}{\rho} \cdot d\rho = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\, d\phi \qquad \begin{pmatrix} \rho > 0 \\ \phi \neq k \cdot \pi \\ \text{mit } k \in \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

$$0 < \phi < 2\pi$$

$$\int \frac{1}{\rho}\, d\rho = \int \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\, d\phi$$

Hinweis: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C'$

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a \underbrace{- \ln b}_{+ c_3}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + c_1 = \ln\left(|\sin\phi|\right) + c_2$$

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \ln|\sin\phi| + (c_2 - c_1)$$

$$\frac{\rho}{\cancel{\rho_0}} = |\sin\phi| \cdot \underbrace{e^{c_2 - c_1} \cdot \rho_0}_{=: C}$$

→ Parametrische Beschreibung der Feldlinien: $\rho = C\,|\sin\phi|$

für $\rho > 0$, $\phi \neq 0$, $\phi \neq \pi$ $\qquad (0 < \phi < 2\pi)$

c) Transformation in Kartesische Koordinaten

$$\sqrt{x^2+y^2} = c \cdot \left| \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = c \cdot |y|$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - |y| \cdot c = 0$$

Ziel: Kreisgleichung

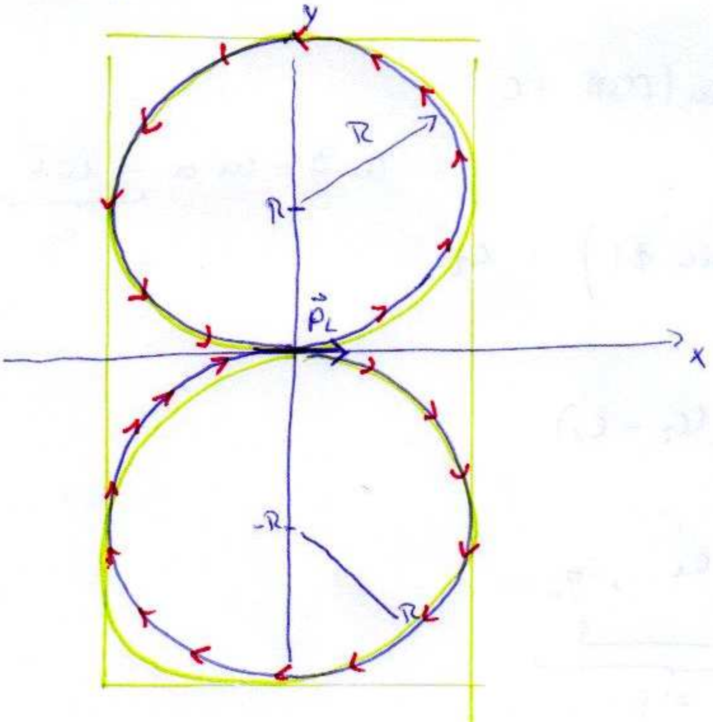
→ Quadrat. Ergänzung $+ \left(\frac{c}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \underbrace{y^2 - c|y| + \left(\frac{c}{2}\right)^2}_{\left(|y| - \frac{c}{2}\right)^2} = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Abkürzung: $R := \frac{c}{2}$

$$\Rightarrow \quad x^2 + (|y| - R)^2 = R^2$$

Kreisgleichung für Kreise mit dem Radius R und dem Mittelpunkt $x = 0$ und $|y| = R \Leftrightarrow y = \pm R$



Anm.: Die Feldlinien sind <u>nicht</u> geschlossen, sondern beginnen bei $x = 0+$ und enden bei $x = 0-$