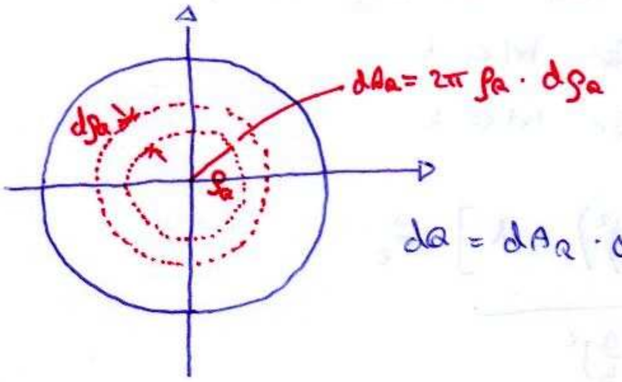
[...]

Die Teilintegration über $d\phi_e$ ist trivial:

$$E_z(0,0,b) \frac{\sigma_e \cdot b}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_{\rho_Q=0}^{a} \frac{\rho_Q \, d\rho_Q}{[\rho_Q^2+b^2]^{3/2}} \cdot \underbrace{\int_{\phi_Q=0}^{2\pi} d\phi_Q}_{=2\pi}$$

Ansatz mit dem Ergebnis aus Aufg. 4b angewendet auf einen Kreisring mit dem Radius ρ_Q und der Breite $d\rho_Q$:



$$dQ = dA_Q \cdot \sigma_e$$

Annäherung von dQ als ringförmige Linienladung mit dem Radius ρ_Q und Ladungsbelag dq_L

$$dQ = \sigma_e \cdot 2\pi\rho_Q \cdot d\rho_Q \stackrel{!}{=} dq_L \cdot 2\pi\rho_Q$$

$$\rightarrow dq_L = \sigma_e \cdot d\rho_Q$$

d.h. ersetze im Ergebnis aus Aufg. 4b:

$E_z(0,0,b)$	durch	$dE_z(0,0,b)$
q	durch	dq_L
a	durch	ρ_Q

$$dE_z(0,0,b) = \frac{dq_L \cdot \rho_Q \cdot b}{2\varepsilon_0 \, [\rho_Q^2+b^2]^{3/2}}$$

c)

$$E_z(0,0,b) = \frac{\sigma_e \cdot b}{2\varepsilon_0} \cdot \int_{\rho_Q=0}^{a} \frac{\rho_Q \cdot d\rho_Q}{[\rho_Q^2+b^2]^{3/2}}$$

$$E_z(0,0,b) \stackrel{\text{HINWEIS}}{=} \frac{\sigma_e \cdot b}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{[\rho_Q^2+b^2]^{1/2}}\right]_{\rho_Q=0}^{a}$$

$$\vec{E}(0,0,b) = E_z(0,0,b)\cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{\sigma_e \cdot b}{2\varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{b} \right] \cdot \vec{e}_z$$

Fernfeld für $b >> a$

$$\vec{E}(0,0,b) = \frac{\sigma_e \cdot b}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{b} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{(\frac{a}{b})^2+1}} + 1 \right] \cdot \vec{e}_z$$

Der Ansatz $\sqrt{a^2+b^2} \approx b$ ist hier zu ungenau

HINWEIS: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ für $|x| << 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x \quad \text{für } |x| << 1$$

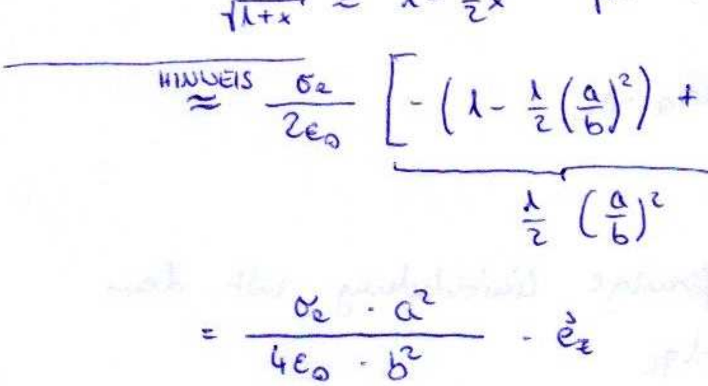
$$\overset{\text{HINWEIS}}{\approx} \frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0} \underbrace{\left[-\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right) + 1 \right]}_{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2} \cdot \vec{e}_z$$

$$= \frac{\sigma_e \cdot a^2}{4\varepsilon_0 \cdot b^2} \cdot \vec{e}_z$$

Formulierung: mit der Gesamtladung $Q = \sigma_e \cdot \pi a^2$

$$\vec{E}(0,0,b) \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \vec{e}_z \quad \text{für } b >> a$$

Aufg. 6



a)

$$dQ = \rho_e \cdot dV = \rho_e \, \pi a^2 \cdot dz$$
$$\overset{!}{=} d\sigma_e \cdot \pi a^2$$

$$\rightarrow d\sigma_e = \rho_e \cdot dz$$

Ersetze im Ergebnis aus Aufg. 5c:

[...]

$\vec{E}(0,0,b)$ durch $d\vec{E}(0,0,b)$

σ_e durch $d\sigma_e$

b durch $b-z$

Voraussetzung: $b-z > 0$

hier : $b > c \geq z$

$$d\vec{E}(0,0,b) = \frac{d\sigma_e \cdot (b-z)}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{a^2+(b-z)^2}} + \underbrace{\frac{1}{|b-z|}}_{=\frac{1}{b-z}}\right]\vec{e}_z$$

b)

$$\vec{E}(0,0,b) = \int_{z=c}^{c} d\vec{E}$$

$$= \frac{\rho_e}{2\varepsilon_0}\int_{z=-c}^{c}\left[-\frac{b-z}{\sqrt{a^2+(b-z)^2}} + 1\right]\cdot dz \cdot \vec{e}_z$$

Hilfe: $\sqrt{f(x)}\,' = \frac{-f(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$$= \frac{\rho_e}{2\varepsilon_0}\cdot\left(\left[\sqrt{a^2+(b-z)^2}\right]_{z=-c}^{c} + 2c\right)\cdot\vec{e}_z$$

$$= \frac{\rho_e}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+(b-c)^2} - \sqrt{a^2+(b+c)^2} + 2c\right)\cdot\vec{e}_z$$

(für $b > c$)

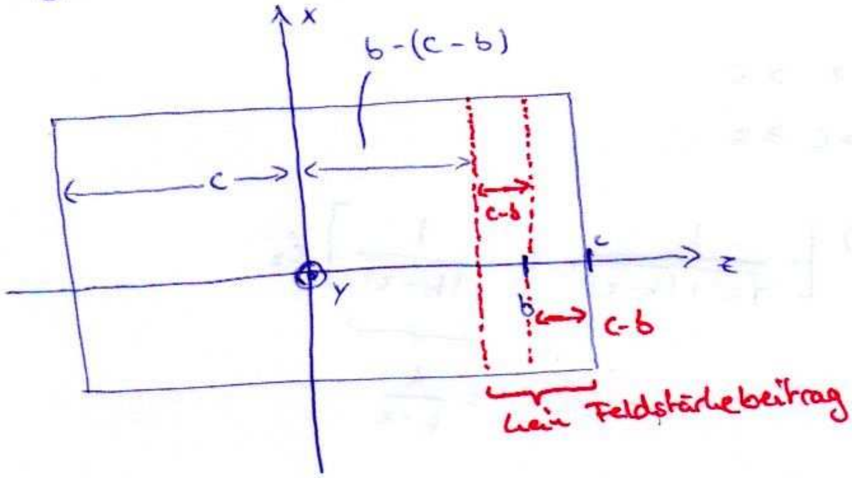
Betrachte $0 < b < c$

1. Lösungsansatz:
Fallunterscheidung für den Integranden:

$$|b-z| = \begin{cases} b-z & \text{falls } b \geq z \\ z-b & \text{falls } b < z \end{cases}$$

$$\vec{E} = \int_{z=-c}^{b} \underbrace{\ldots\ dz}_{b \geq z} + \int_{z=b}^{c} \underbrace{\ldots\ dz}_{b<z}$$

2. Lösungsansatz



Breite der Restzylinders:

$$c + b - (c-b) = 2b$$

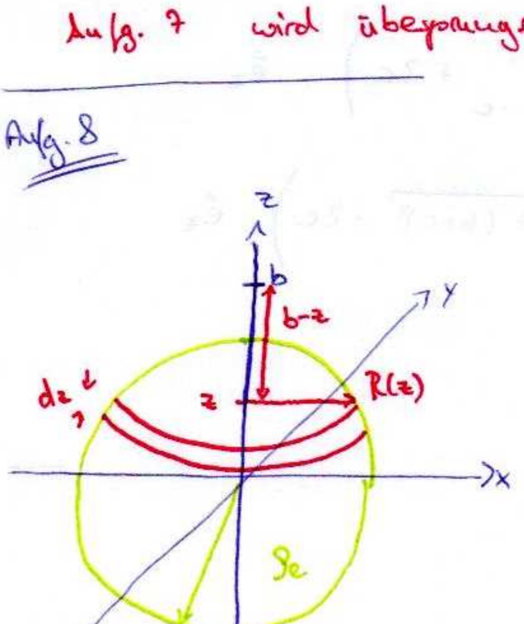
$$\Rightarrow \vec{E} = \int_{z=-c}^{b-(c-b)} \underbrace{\ldots\ dz}_{b \geq z}$$

Lösung für b=0: Aus symmetrie Gründen

$$\vec{E}(0,0,b) = -\vec{E}(0,0,b)$$

Aufg. 7 wird übergangen

Aufg. 8



Aus Kugelsymmetrie folgt:

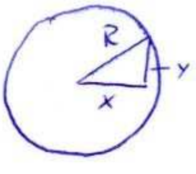
$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r,\cancel{\theta},\cancel{\phi})\ \vec{e}_r + \cancel{E_\theta(r,\theta,\phi)\ \vec{e}_\theta} + \cancel{E_\phi(r,\theta,\phi)\cdot\vec{e}_\phi}$$

[...]

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \cdot \vec{e}_r$$

Gesucht: $R(z)$

Allg. gilt: $R^2(z) = x^2 + y^2$



und $R(z) > 0$

$$\rightarrow R(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(vgl. ρ in Zylinderkoordinaten)

Kugelgleichung: $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\rightarrow x^2 + y^2 = a^2 - z^2$$

$$\rightarrow R(z) = \sqrt{a^2 - z^2}$$

für $-a \leq z \leq a$

wie in Aufg. 6: $d\sigma_e = \rho_e \cdot dz$

b) mit dem Ergebnis aus Aufg. 5c

$\vec{E}(0,0,b)$	ersetzt durch	$d\vec{E}(0,0,b)$
σ_e	—— " ——	$d\sigma_e$
a	—— " ——	$R(z)$
b	—— " ——	$b - z$

$$d\vec{E} = \frac{\rho_e \cdot dz}{2\varepsilon_0} \cdot \left[1 - \frac{b-z}{\underbrace{\sqrt{R(z)^2 + (b-z)^2}}_{a^2 - \cancel{z^2} + b^2 - 2bz + \cancel{z^2}}}\right] \vec{e}_z$$

$$d\vec{E} = \frac{\rho_e \cdot dz}{2\varepsilon_0} \cdot \left[1 - \frac{b-z}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2bz}}\right] \vec{e}_z$$

c)

$$\vec{E}(0,0,b) = \int_{z=-a}^{a} d\vec{E} = \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2\varepsilon_0} \cdot \int_{z=-a}^{a} \left(1 - \frac{b-z}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2bz}}\right) dz$$

HINWEIS

$$= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2\varepsilon_0} \cdot \left[z - \frac{1}{3b} \cdot \left(z + \frac{a^2 - 2b^2}{b}\right) \sqrt{a^2 + b^2 - 2bz}\right]_{z=-a}^{a}$$

$$= \frac{\rho_e \cdot \vec{e}_z}{2\varepsilon_0} \cdot \left[2a - \frac{1}{3b}\left(a + \frac{a^2 - 2b^2}{b}\right) \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}}_{|a-b| = b-a} + \frac{1}{3b}\left(-a + \frac{a^2 - 2b^2}{b}\right) \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ba}}_{|a+b| = a+b}\right]$$

$$= \frac{\rho_e \vec{e}_z}{2\varepsilon_0} \cdot \left[2a - \frac{1}{3b^2} \cdot \left\{ (a \cdot b + a^2 - 2b^2)(b-a) - (-a \cdot b + a^2 - 2b^2) \cdot (a+b) \right\} \right]$$

$$= \frac{\rho_e \vec{e}_z}{2\varepsilon_0} \left[2a - \frac{1}{3b^2} \cdot \left\{ 6ab^2 - 2a^3 \right\} \right]$$

$$= \frac{\rho_e \vec{e}_z}{2\varepsilon_0} \left[2a - 2a + \frac{2a^3}{3b^2} \right]$$

$$= \frac{\rho_e}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{a^3}{b^2} \cdot \vec{e}_z$$

Mit der Gesamtladung $Q = \rho_e \frac{4}{3}\pi \cdot a^3$

$$\vec{E}(0,0,b) = \underbrace{\frac{\rho_e \cdot a^3 \cdot 4\pi}{3}}_{Q} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{b^2} \cdot \vec{e}_z$$

entspricht für $b > a$ <u>exakt</u> dem Feld einer Punktladung im Ursprung