27.10.09

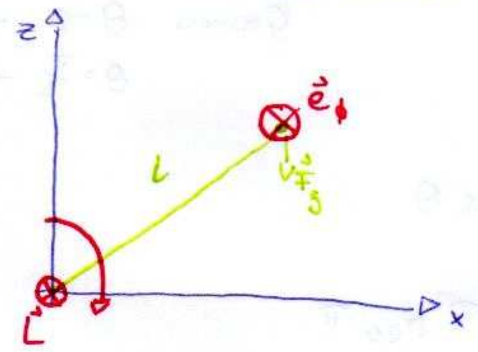
[...]

$$\vec{L} = (L\cdot\vec{e}_r)\times(-m\cdot g\cdot\cos\theta\cdot\vec{e}_r + m\cdot g\cdot\sin\theta\,\vec{e}_\theta)$$

$$= (-L\cdot m\cdot g\cdot\cos\theta)\cdot\underbrace{(\vec{e}_r\times\vec{e}_r)}_{=0} + (L\cdot m\cdot g\cdot\sin\theta)\cdot\underbrace{(\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta)}_{=\vec{e}_\phi}$$

$$= L\cdot m\cdot g\cdot\sin\theta\,\vec{e}_\phi$$

am Ort der Masse



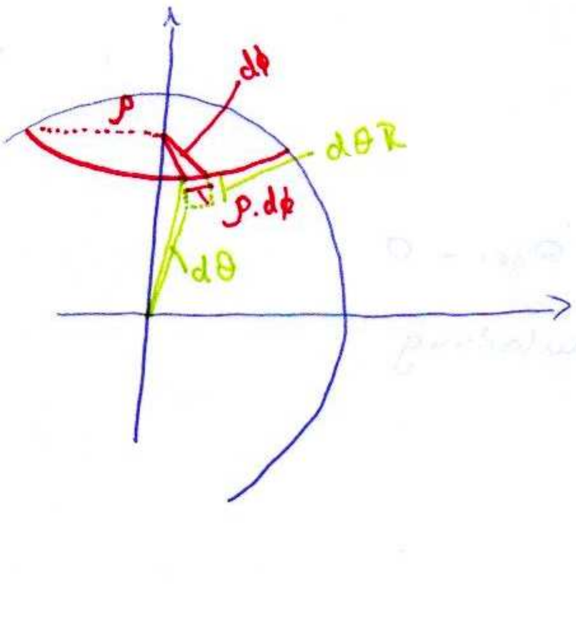
Anmerkung: Die Richtung von $\vec{L}$ und der Drehsin sind im Rechtsschraubensinn miteinander verknüpft

$\vec{L}\ \otimes$

xyz xyz
ρφz ρφz
rθφ rθφ

Aufg. 3

$$[\sigma_e] = \frac{1\,As}{m^2}$$



$$dA = \underbrace{R\cdot\sin\theta}_{\rho}\cdot d\phi\cdot R\cdot d\theta$$

$$dQ = \sigma_e(\theta)\cdot dA$$

a)

$$Q_1 = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} dQ(\theta,\phi) = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\phi=0}^{2\pi} R^2 \sin\theta\, \sigma_{e0}\, d\theta\, d\phi \cos\theta$$

$$= R^2 \sigma_{e0} \cdot 2\pi \cdot \int_{\theta=0}^{\pi/2} \underbrace{\sin\theta}_{u} \cdot \underbrace{\cos\theta \cdot d\theta}_{du}$$

Substitution: $u = \sin\theta$ Grenzen: $\theta = 0 \rightarrow u = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1$

$$\frac{du}{d\theta} = \cos\theta$$

$$\rightarrow du = d\theta \cos\theta$$

$$Q_1 = R^2 \sigma_{e0} \cdot 2\pi \underbrace{\int_{u=0}^{1} u \cdot du}_{=\frac{1}{2}} = R^2 \sigma_{e0} \cdot \pi$$

b)

$Q_{ges} = Q_1 + Q_2$

$\quad\quad\quad\quad\quad\uparrow$ untere Hälfte

Bereich $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

Grenzen: $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1$

$\theta = \pi \rightarrow u = 0$

$$Q_2 = R^2 \cdot \sigma \cdot 2\pi \underbrace{\int_{u=1}^{0} u\, du}_{=-\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow Q_2 = -Q_1 \quad \Rightarrow \quad Q_{ges} = 0$

c) Jetzt in homogene Raumladung

$$\rho_e = \rho\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$Q_{ges} = \int_{r=0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_e(r) \cdot dV$$

[..]

$dV = dA \cdot dr$

$$Q_{ges} = \frac{\rho_{e0}}{R} \underbrace{\int_{r=0}^{R} r^3 \, dr}_{\frac{1}{4} R^4} \cdot \underbrace{\int_{\theta_0}^{\pi} \sin\theta}_{\underbrace{[-\cos\theta]_{\theta=0}^{\pi}}_{=2}} \underbrace{\int_{\phi_0}^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$$

$$= \frac{\rho_{e0}}{R} \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \pi = \rho_{e0} \cdot \pi \cdot R^3$$

Aufg. 4

$q_L = \text{const.}$ $\qquad [q_L] = \frac{A \cdot s}{m}$

$\varepsilon = \varepsilon_0 \qquad F = Q \cdot E$

am Ort der Ladung wo uns die Kraft auf die Ladung bzw. das lokale E-Feld interessiert

a) Hier liegt der Aufpunkt auf der z-Achse

$\Rightarrow$ Anordnung ist rotationssymmetrisch zur z-Achse

Gesucht: $\vec{r}_{AQ}$

(sinnvoll: Zylinderkoordinaten)

Aufpunkt: $\vec{r}_A = b \cdot \vec{e}_z$

Quellpunkt $\vec{r}_Q = a \cdot \underbrace{\vec{e}_\rho}_{f(\phi_Q)}$

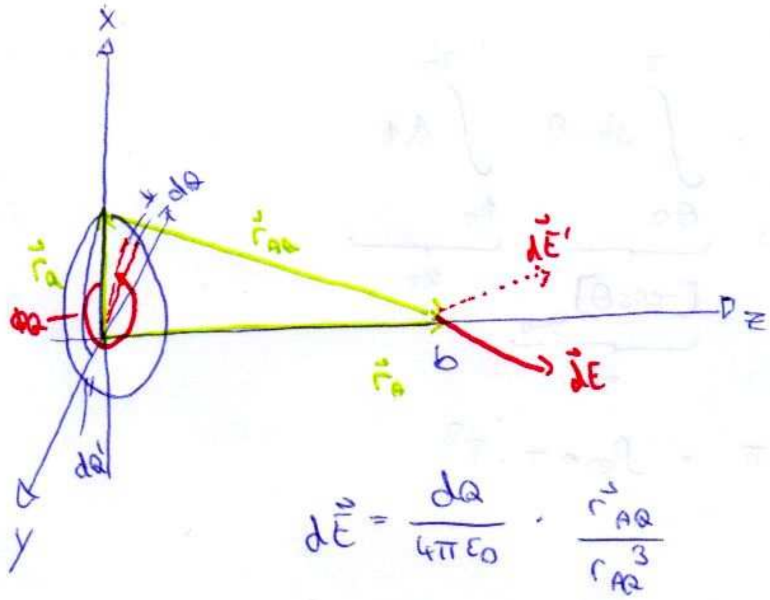
$\rho_Q = a$

$z_Q = 0$

$\phi_Q = [0, 2\pi[$

$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = b \cdot \vec{e}_z - a \, \vec{e}_\rho(\phi_Q)$

b) Betrachte zunächst den Feldstärkebetrag eines kleinen Ladungselements dQ



$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^3}$$

$r_{AQ} = |\vec{r}_{AQ}| = |b \cdot \vec{e}_z - a \cdot \vec{e}_\rho(\phi_Q)|$

wegen $\vec{e}_z \perp \vec{e}_\rho$:

$$r_{AQ} = \sqrt{b^2 + a^2}$$

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{b \cdot \vec{e}_z - a \cdot \vec{e}_\rho(\phi_Q)}{\sqrt{b^2+a^2}^3}$$

Aus der Rotationssymmetrie der Anordnung folgt:

$$\vec{E}(\vec{r}_A) = \vec{E}(0,0,b) = E_z(0,0,b) \cdot \vec{e}_z$$

$$E_z(0,0,b) = \int_{\text{Linien Ladung}} dE_z(0,0,b)$$

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}^3}$$

hier ist $dQ = q_L \underbrace{ds}_{a\,d\phi_Q}$

R, α, $\sim \alpha \cdot R$

$$E_z = \frac{q_L}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}^3} \cdot \underbrace{\int_{\phi_Q=0}^{2\pi} a \cdot d\phi_Q}_{a \cdot 2\pi}$$

$$\vec{E}(\vec{r}_A) = \vec{E}(0,0,b) = E_z \cdot \vec{e}_z$$

c) Fernfeld: $b >> a$

$$\vec{E}(0,0,b) = \frac{q_L \cdot a \cdot b}{\underbrace{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \sqrt{b^2 + \cancel{a^2}}^3}_{\approx \sqrt{b^2}^3 = b^3}} \cdot \vec{e}_z \qquad (b > 0)$$

$$\Rightarrow \vec{E} \approx \frac{q_L \cdot a}{2\varepsilon_0 \cdot b^2} \cdot \vec{e}_z$$

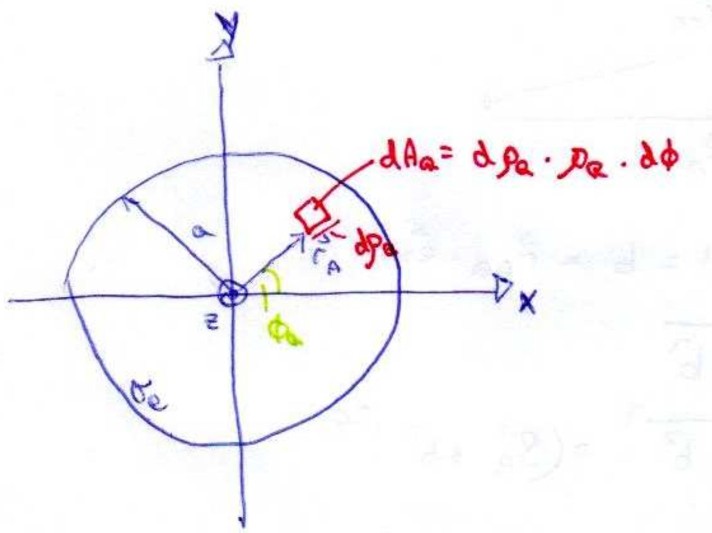
Formulierung mit der Gesamtladung Q des Kreisrings:

$$Q = 2\pi a \cdot q_L$$

$$\vec{E}(\vec{r}_A) \approx \frac{q_L \cdot a \cdot 2\pi}{2\varepsilon_0 \cdot b^2 \cdot 2\pi} \cdot \vec{e}_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot b^2} \cdot \vec{e}_z$$

Dies entspricht dem Feld einer Punktladung Q im Ursprung

Aufg. 5



$$dQ = \sigma_e \cdot dA_Q = \sigma_e \cdot d\rho_Q \cdot \rho_Q \cdot d\phi_Q$$

$$\vec{r}_Q = \rho_Q \cdot \vec{e}_\rho(\phi_Q)$$

$$\vec{r}_A = b \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_{AQ} = \vec{r}_A - \vec{r}_Q = b \cdot \vec{e}_z - \rho_Q \cdot \vec{e}_\rho(\phi_Q)$$

Quellgebiet: $0 \le \rho_Q \le a$

$0 \le \phi_Q < 2\pi$

$z_Q = 0$

b)

$$\vec E(\vec r_A) = E(0,0,b) = \int_{\varrho_Q=0}^{a}\int_{\phi_Q=0}^{2\pi} \underbrace{\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec r_{AQ}}{r_{AQ}^3}}_{d\vec E}$$

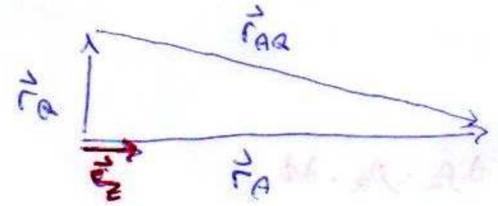
Aus Rotationssymmetrie folgt:

$$\vec E(0,0,b) = \vec E_z(0,0,b)\cdot \vec e_z \qquad \text{(vgl. A4)}$$

$$dE_z(0,0,b) = d\vec E(0,0,b)\cdot\vec e_z$$

$$= \frac{\vec r_{AQ}\cdot\vec e_z}{r_{AQ}^3}\cdot\frac{\sigma_e\, \varrho_Q\, d\phi_Q\, d\varrho_Q}{4\pi\varepsilon_0}$$

Dabei ist $\vec r_{AQ}\cdot\vec e_z = b$



$$|\vec r_A| = b = \vec r_{AQ}\cdot\vec e_z$$

$$r_{AQ} = \sqrt{\varrho_Q^2+b^2}$$

$$r_{AQ}^3 = \sqrt{\varrho_Q^2+b^2}^{\,3} = (\varrho_Q^2+b^2)^{3/2}$$