Folien zur Vorlesung: Kennwort „Coulomb"

Fortsetzung 3)

KUGELKOORDINATEN

Koordinatenlinien bzgl. r: Radialstrahlen vom Ursprung aus

———— " ———— θ: Halbkreise um den Ursprung, Radius r

———— " ———— ϕ: Kreise um die z-Achse, Radius $\rho = r \cdot \sin\theta$

Ortsvektor: $\vec{r} = r \cdot \underbrace{\vec{e}_r}_{\text{Richtung hängt von } \theta, \phi \text{ ab}}$

$|\vec{r}| = r$

$0 \leq r < \infty$

$0 \leq \theta \leq \pi$

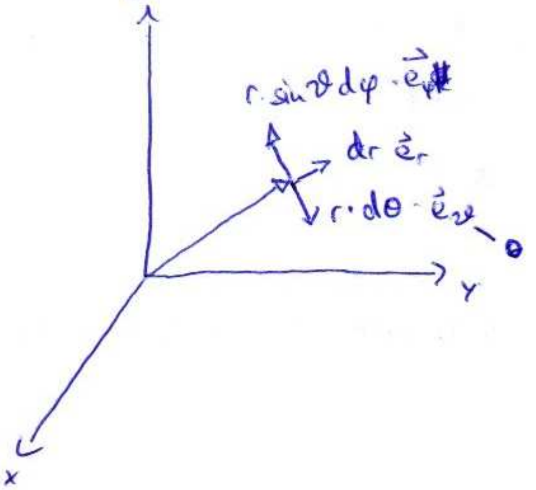
$0 \leq \phi < 2\pi$

Einheitsvektor: $\underbrace{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta}_{\text{hängen von } \theta, \phi \text{ ab}}, \underbrace{\vec{e}_\phi}_{\text{hängt von } \phi \text{ ab}}$

Skalarfeld: $f(\vec{r}) = f(r, \theta, \phi)$

Vektorfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = F_r(r,\theta,\phi) \cdot \vec{e}_r + F_\theta(r,\theta,\phi) \cdot \vec{e}_\theta + F_\phi(r,\theta,\phi) \cdot \vec{e}_\phi$

Wegelement: $d\vec{r} = dr \cdot \vec{e}_r + r\, d\theta \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot \sin\theta\, d\phi \cdot e_\phi$



Also: $dV = dr \cdot r\, d\vartheta \cdot r \sin\vartheta\, d\phi$

Vgl: $dV = dx \cdot dy \cdot dz$

weiter umwandeln:

$$\vec{e}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \vec{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \vec{e}_y$$

$$\rightarrow \vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (-y \cdot \vec{e}_x + x \cdot \vec{e}_y)$$

b) Kugelkoordinaten:

$$\vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

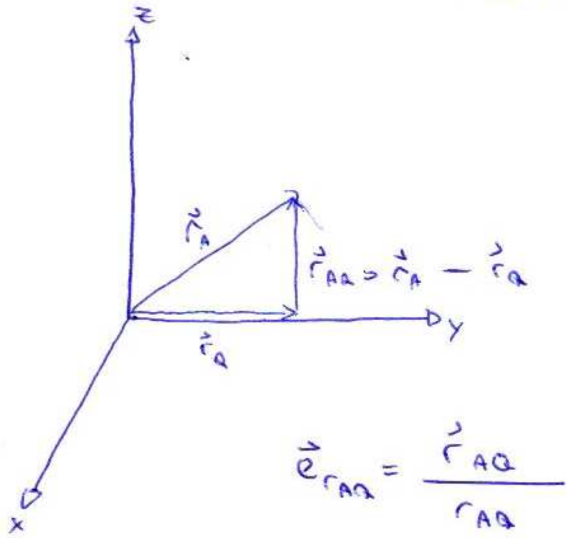
$$\Leftrightarrow \vec{B}_2(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^2} \qquad (\text{denn } \vec{r} = r \cdot \vec{e}_r)$$

$$\Rightarrow B_2(\vec{r}) = \frac{x \cdot e_x + y \cdot e_y + z \cdot e_z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

c)

$$\vec{B}_3(\vec{r}_A) = \frac{\vec{e}_{r_{AQ}}}{r_{AQ}^2}$$

für $\vec{r}_Q = a \cdot \vec{e}_y$ und $\vec{r}_A (x_A, y_A, z_A)$



$$\vec{e}_{r_{AQ}} = \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}}$$

In kartesischen Koordinaten:

$$\vec{r}_A = x_A \cdot \vec{e}_x + y_A \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_Q = x_Q \cdot \vec{e}_x + y_Q \cdot \vec{e}_y + z_Q \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}_{AQ} = (x_A - x_Q) \cdot \vec{e}_x + (y_A - y_Q) \cdot \vec{e}_y + (z_A - z_Q) \cdot \vec{e}_z$$

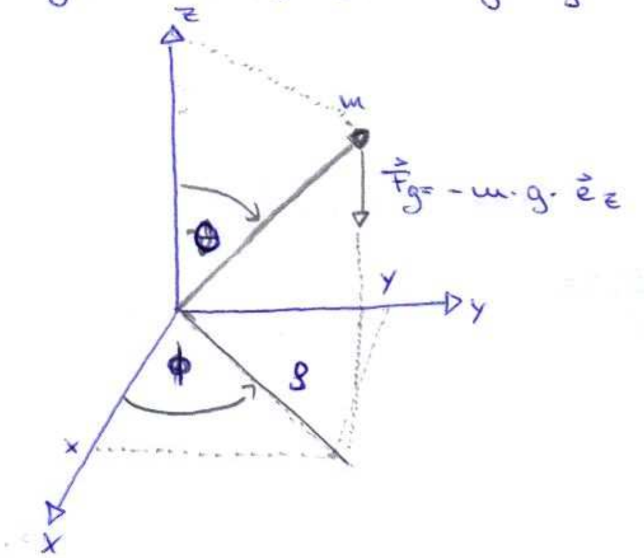
$$\underline{\underline{\text{hier}}} = x_A \cdot e_x + (y_A - a) \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z$$

$$B_3(\vec{r}_A) = \frac{\vec{r}_{AQ}}{r_{AQ}^2} = \frac{x_A \cdot e_x + (y_A - a) \cdot \vec{e}_y + z_A \cdot \vec{e}_z}{\left[x_A^2 + (y_A - a)^2 + z_A^2\right]^{3/2}}$$

! Die komponentenweise Subtraktion von Ortsvektoren ist im Allg. nur in kartesischen Koordinaten korrekt.

Aufg. 2

g ist die Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81\ m/s^2$)



Allg. $\vec F_g = F_{g,x}\cdot \vec e_x + F_{g,y}\vec e_y + F_{g,z}\cdot \vec e_z$

hier: $\vec F_g = F_{g,z}\cdot \vec e_z$

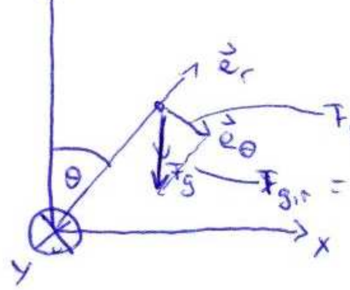
Ort der Masse m: $\vec r = l\cdot \underbrace{\vec e_r}_{\text{abh. von } \theta,\phi}$

Umwandlung von $\vec F_g$ in Kugelkoordinaten:

Aus Zylinder-koordinaten: $e_\phi \perp \vec e_z$

deshalb: $F_{g,\phi} = \underbrace{\vec F_g \cdot e_\phi}_{\text{Projektion von } \vec F_g \text{ auf die } \phi\text{-Richtung}} = 0$

Bestimmung von $F_{g,r}$ und $F_{g,\theta}$



$F_{g,\theta} = m\cdot g\cdot \sin\theta \cdot \vec e_\theta$

$F_{g,r} = m\cdot g\cdot \cos\theta\cdot(-\vec e_r)$

Aus Formelsammlung:

$\vec e_z = \vec e_r \cdot \cos\theta - \vec e_\theta \cdot \sin\theta$

$\vec{F}_g = -m \cdot g \cdot \cos\theta \; \vec{e}_r + m \cdot g \cdot \sin\theta \cdot \vec{e}_\theta$

Zugkraft auf den Stab:

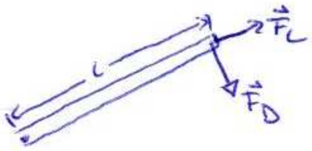
$\vec{F}_l = \vec{F}_g \cdot \vec{e}_l = \underbrace{\vec{F}_g \cdot \vec{e}_r}_{\text{Projektion}} = F_{g,r}$

$= -m \cdot g \cdot \cos\theta$

$\vec{F}_l < 0$ für $0 \leq \theta < \pi/2$ $\Rightarrow$ Druckkraft
(oberhalb der x-y-Ebene)

$F_l > 0$ für $\pi/2 < \theta \leq \pi$ $\Rightarrow$ Zugkraft
(unterhalb der x-y-Ebene

Drehmoment im Ursprung:



$L = F_D \cdot l$

$\vec{L} = \vec{l} \times \vec{F}_g$ (das entspricht $l \cdot F_{g\perp}$)

$l \cdot \vec{e}_r$

Beispiel Tür $l_{\text{wirksam}} = l \cdot \vec{e}_z$