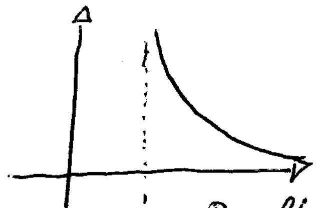
Uneigentliche Parameterintegrale

uneigentl. Integrale:

1) $\int_a^\infty f(x)\,dx$

2) $\int_a^b f(x)\,dx$; f nicht stetig in a $f(a,b] \to \mathbb{R}$



z.B. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$; $\alpha \in (0,1)$

uneigentl. Parameterintegrale

1) $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$; $y \in [c,d]$ Wann stetig? Wann diff'bar?

2) $\int_a^b f(x,y)\,dx$; $y \in [c,d]$

$f(a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

Beispiel:

$$\hat{f}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{ixy} f(x)}_{g(x,y)}\,dx$$

f symmetrisch
$f(x) = f(-x)$

$$\hat{f}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(xy)\, f(x)\,dx$$

Newton Potential $\rho(\underline{x})$ Ladungsverteilung

$$U(\underline{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)}{\| x - y \|}\,dx$$

Frage: Lassen sich die Stetigkeits und Diff'barkeits aussagen für "einfache" Parameterintegrale auf uneigentliche Parameterintegrale verallgemeinern?
→ Im allgemeinen brauchen wir zusätzliche „Gleichmäßigkeits-bedingungen"

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x}$$

$$\phi(y) = \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{x}\,dx$$

Integrale dieser Bauart haben wir bereits in HM2 untersucht.

$$\left|\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \leq \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty \quad \lightning$$

so nicht !

$$\phi(y) = \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{xy}\, y\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{xy}\,d(xy)$$
$(y>0)$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

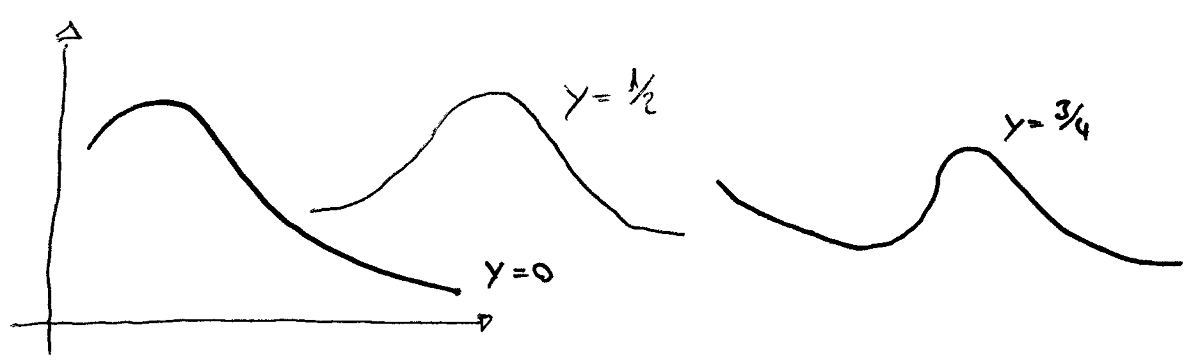
$$\phi(-y) = \int_0^\infty \frac{\sin(x(-y))}{x}\,dx = -\int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{x}\,dx = -\phi(y)$$

sin ist antisymmetrisch

$$\phi(0) = \int_0^\infty 0\,dx = 0$$

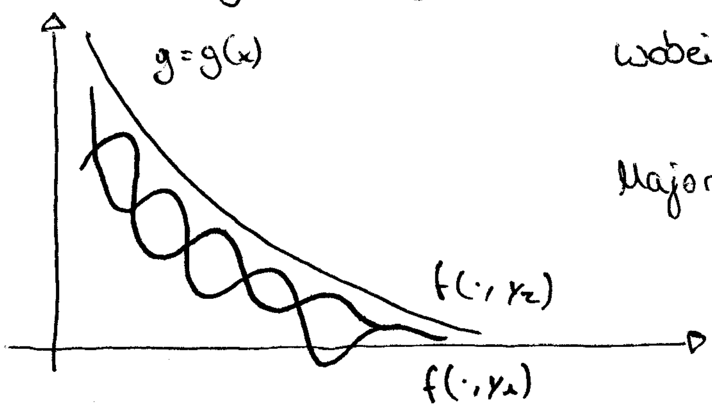
$$\Rightarrow \quad \phi(y) = \begin{cases} -\pi/2 & y < 0 \\ 0 & y = 0 \\ \pi/2 & y > 0 \end{cases} \qquad \text{unstetig}$$

obwohl: $(x,y) \rightarrow \frac{\sin(xy)}{x}$ stetig



Fällt ungleichmäßig ab !

Kriterium für gleichmäßige Konvergenz



wobei $\int_a^\infty g(x)\,dx < \infty$

Majorante

$|\phi(y+h)-\phi(y)|$ ist klein falls

$\left|\int_a^b f(x,y+h)-f(x,y)\,dx\right|$ klein (dazu reicht stetigkeit)

$\underbrace{\left|\int_a^\infty f(x,y+h)\,dx\right|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\left|\int_b^\infty f(x,y)\,dx\right|}_{<\varepsilon}$ klein (folgt aus glm. Konvergenz)

$<\varepsilon$ falls $|f(x,y+h)-f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

wahr falls $|h|<\delta$

D.h. Ableitung $\frac{d}{dy}$ kann als partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}$ ins Integral hineingezogen werden

---

$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-y} y^{x-1}\,dy$

kontinuierliche Fortsetzung der Fakultät

$n \longmapsto n!$

<u>betr.</u> $e^{-y}y^{x-1} =: f(x,y)$ $\quad y\in[0,\infty)$, $x\in[a,b]$; $0<a<b<\infty$

Γ-Funktion ist ein uneigentliches Parameterintegral

stetig? diff'bar?

- Integrationsinterval ist unbeschränkt
- $x\in(0,1)$: $f(x,y) = e^{-y}y^{x-1}$

gleichmäßige Abschätzung:

$$0 \leq f(x,y) \leq \begin{cases} \cancel{e^{-y}}\, 1\, y^{a-1} & y \leq 1 \\ e^{-y}\, y^{b-1} & y \geq 1 \end{cases}$$

$y \leq 1$: Integrierbar zwischen $y=0$ und $y=1$ falls $a>0$

$y \geq 1$: Integrierbar zwischen $y=1$ u. $y=\infty$

Exponentieller Faktor überwiegt

$$e^{-y}\, y^{b-1} = e^{-y/2} \underbrace{\left(e^{-y/2}\, y^{b-1}\right)}_{\leq C_1 \text{ unabhängig von } y}$$

$$g(y) := \begin{cases} 1\, y^{a-1} & y \leq 1 \\ e^{-y}\, y^{b-1} & y \geq 1 \end{cases}$$

Integrierbar

$\Rightarrow$ Stetigkeit der Gamma-Funktion

diff'barkeit?

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-y}\, y^{x-1}\right)$$

$$= e^{-y} \frac{\partial}{\partial x}\left(\exp\left(\underbrace{\ln y^{x-1}}_{(x-1)\ln y}\right)\right)$$

$$= e^{-y} \frac{\partial}{\partial x} \exp(\ln y\, (x-1))$$

$$= e^{-y} \ln y\, \exp(\ln y\, (x-1))$$

$$= e^{-y} \ln y\, y^{x-1}$$

$$\leadsto \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \begin{cases} |\ln y|\, y^{a-1} \\ |\ln y|\, y^{b-1}\, e^{-y} \end{cases}$$

beachte: $|\ln y| \cdot y^{\alpha} \leq C_1 \quad \forall y \in (0,1)$, $\alpha > 0$

$$\frac{\ln y}{y} \longrightarrow 0 \text{ für } y \to \infty$$

Zeige: $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

$$\int_0^\infty e^{-y}\, y^{(x+1)-1}\, dy = \int_0^\infty e^{-y}\, y^{x}\, dy$$

[...]

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}(-e^{-y})\ y^x\ dy$$ Partielle Integration

$$= \int_0^\infty e^{-y}\frac{\partial}{\partial y}\ y^x\ dy + \underbrace{\left[-e^{-y}\ y^x\right]_0^\infty}_{=0}$$ $(x>0)$!

$$= \int_0^\infty e^{-y}\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\ \exp(\ln y\ x)}_{\exp(\ln y\ x)x\ \frac{1}{y}}dy$$

$$= x\int_0^\infty e^{-y}\ y^x\ \frac{1}{y}\ dy = x\int_0^\infty e^{-y}\ y^{x-1}\ dy = x\,\Gamma(x)$$