EIN BLICK AUF INTEGRIERBARKEIT IN HÖHEREN DIMENSIONEN

1D:

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

Zerlegung in Teilintervalle: $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$

wobei $a = x_0 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$

$\Delta_i := x_i - x_{i-1}$

$$Z = \begin{cases} \{x_i\}_{i=0,\dots,n} & a = x_0 < \dots < x_n = b \\ \xi \in [x_{i-1}, x_i] & \end{cases}$$

Feinheit $[Z] := \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta_i$

$$I(f,(a,b); Z) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i$$

f Riemann integrierbar $:\Longleftrightarrow \exists I = I(f)$

$$\lim_{[Z]\to 0} I(f,(a,b), Z) = I(f)$$

Wir schreiben: $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$

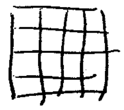
2D: $G \subset \mathbb{R}$ Gebiet: G beschränkt

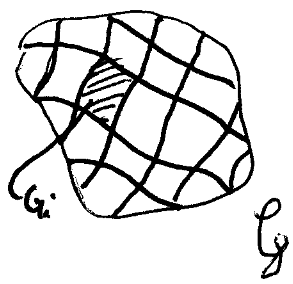
(d.h. $\exists\, R$ Rechteck: $G \subset R$)

$f : \bar{G} \longrightarrow \mathbb{R}$

Zerlegung in was ???

Falls $G = R$ Rechteck
analog 1D.





$$Z = \begin{cases} \{G_i\}_{i=1,\dots,n} \text{ (Teilgebiete)} & G_i \cap G_j = \emptyset \text{ falls } i \neq j \\ & \bar{G} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{G_i} \\ \{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1,\dots,n} & (\xi_i, \eta_i) \in \bar{G_i} \end{cases}$$

G_i sind durch endlich viele stetige Graphen berandet

$d_i \mathrel{\hat=} \operatorname{diam} G_i := \sup_{x,y \in G_i} \| x - y \|$

nach Satz 5.6 haben dann G_i's einen Flächeninhalt

$[Z] := \max_{1 \le i \le n} \operatorname{diam} G_i$

Zwischensumme:

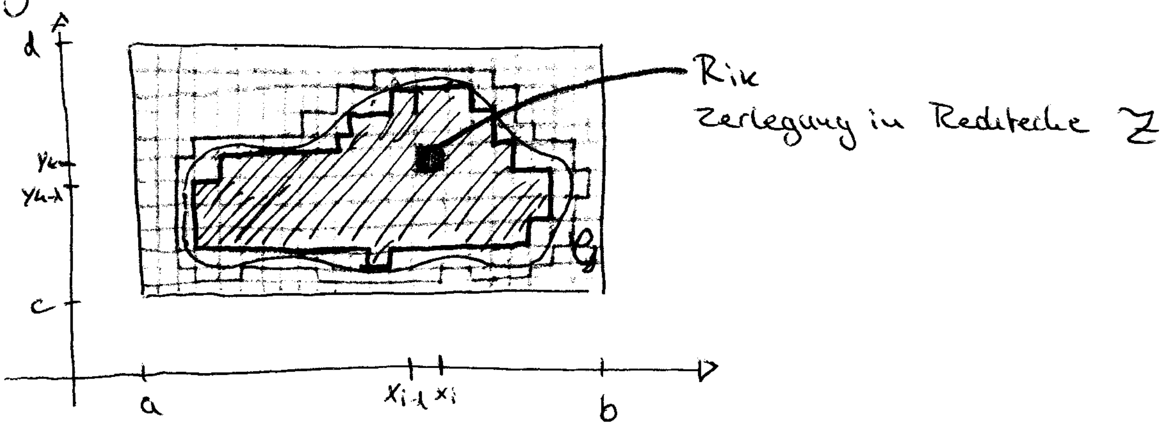
$$I(f, G, Z) := \sum f(\xi_i, \eta_i)\, |G_i|$$

$|G_i|$ Flächeninhalt ?? des Teilgebiets G_i

Was ist der Flächeninhalt eines allgemeinen Gebiets?
Hat jedes Gebiet einen vernünftigen Flächeninhalt?

FLÄCHENINHALT EINES GEBIETS G:

$G \subset \mathbb{R}^2$ beschränktes Gebiet



$\operatorname{diam} R_{ik} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$ $\qquad [Z] = \max_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le k \le m}} R_{ik}$

$U(G, Z) = \sum_{R_{ik} \subset G} |R_{ik}|$ (*) $\rightsquigarrow I_*(G) := \sup_Z U(G, Z)$

$O(G, Z) = \sum_{R_{ik} \cap G = \emptyset} |R_{ik}|$ $\rightsquigarrow I^*(G) := \inf O(G, Z)$

Differenz: $S(\partial G, Z) = \sum_{R_{ik} \cap \partial G \neq 0} |R_{ik}|$

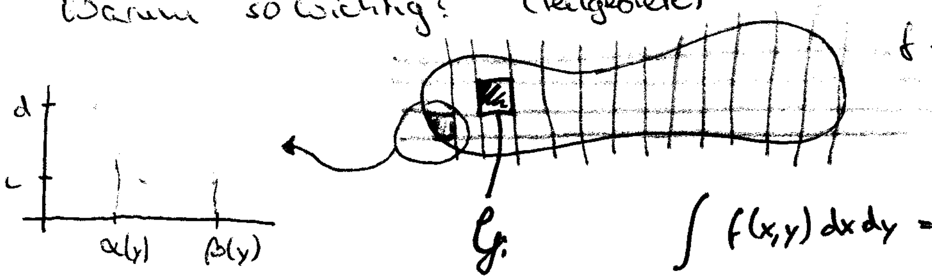
$\boxed{\lim_{[Z] \to 0} S(\partial G, Z) = 0}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{G \text{ hat Flächeninhalt } I(G) = |G|, \text{ falls } I_*(G) = I^*(G)}$

3D: $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt auf ein Volumen, falls der Rand aus endlich vielen stetigen Graphen der Form
$x = \varphi(y,z)$
$y = \psi(x,z)$
$z = f_y(x,y)$

Def $f: \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls $\exists I(f)$
$\lim_{[Z] \to 0} I(f, \mathcal{G}, Z) = I(f)$;
wir schreiben dafür $I(f) = \int_{\mathcal{G}} f(x,y)\,dx\,dy$
$= \iint_{\mathcal{G}} f(x,y)\,dx\,dy$

Welche Funktionen sind integrierbar und wie kann man ihr Integral bestimmen?
Warum so wichtig? (Teilgebiete)

f stetig

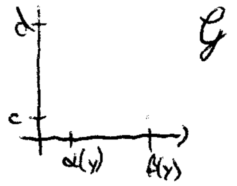


$\int_{\mathcal{G}} f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{G}} f(x,y)\,dx\,dy$

$\int_{\mathcal{G}} f(x,y)\,dx\,dy$
$= \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\,dy$

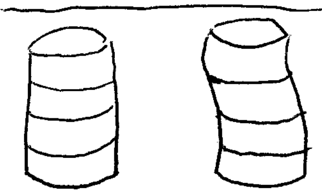
Ist diese Strategie überhaupt gerechtfertigt?

d.h.



$\int_{\mathcal{G}} f(x,y)\,dx\,dy \overset{??}{=} \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\,dy$ ✓

Cavalieri Prinzip



haben das gleiche Volumen

"Zwei Flächen (Körper) haben den selben Flächeninhalt (bzw. Volumen), wenn in jeder Schritthöhe die Schnittflächen gleiche Länge (bzw. Flächeninhalt) haben.