Extremalaufgaben in höheren Dimensionen

$G \subset \mathbb{R}^n$: $f: G \to \mathbb{R}$ diff'bar

$\underline{x}_0 \in G$ heißt lokales Minimum

$:\Leftrightarrow \exists U(\underline{x}_0) \subset G$ Umgebung um $\underline{x}_0$:
$f(\underline{x}_0) \leq f(\underline{x}) \;\forall \underline{x} \in U(\underline{x}_0)$

...... lokales Maximum

$:\Leftrightarrow \exists U(\underline{x}_0) \subset G$ Umgebung um $\underline{x}_0$:
$f(\underline{x}_0) \geq f(\underline{x}) \;\forall \underline{x} \in U(\underline{x}_0)$

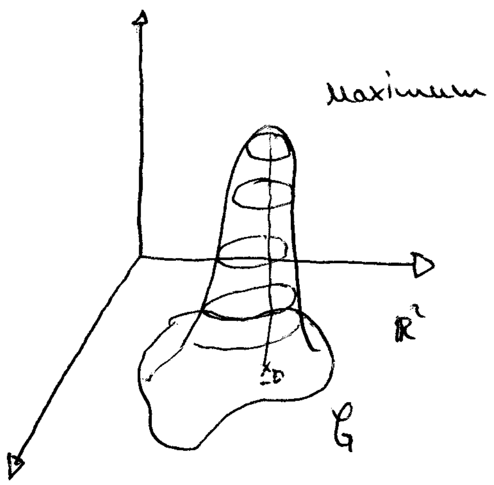
betr.: $F(t) = f(x_{0,1}, \ldots, x_{0,i-1}, t, x_{0,i+1}, \ldots, x_{0,n})$

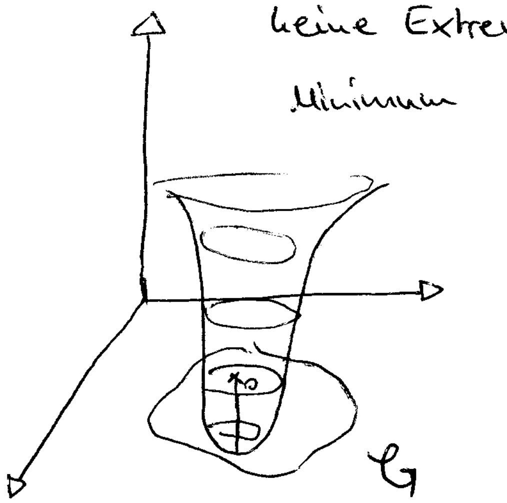
bes. Max. od. Min. bei $t = x_{0,i}$:

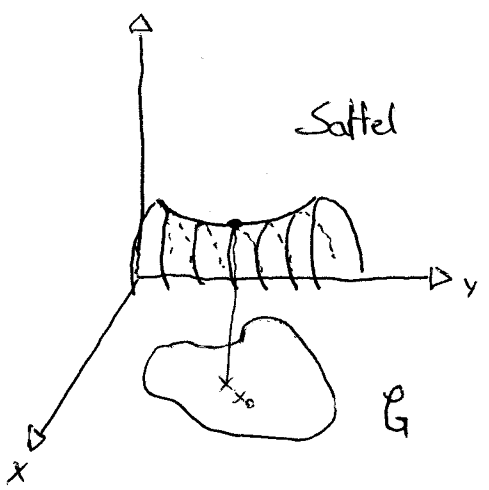
$$\forall_{i=1,\ldots,n} \; 0 = \frac{d}{dt} F(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) \Rightarrow \nabla f(\underline{x}_0) = 0$$

Notwendiges Kriterium für Extremalstellen : $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$

nicht hinreichend : 1D: $f(x) = x^3$ $f'(0) = 0$ aber 0 ist keine Extremalstelle.







Nach geeigneter Rotation der Koordinaten gilt in einem Sattelpunkt:

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y)$$

für x nahe x_0 und y nahe y_0

Hinreichende Bedingungen in 2D:

Sei $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla f(\underline{x}_0) = 0$ für ein $\underline{x}_0 \in G$

$G \subset \mathbb{R}^2$ $\qquad$ f 2x stetig diff'bar

<u>betr.</u> Taylorentwicklung um $\underline{x}_0$.

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0) \cdot h + R_2(\underline{x}_0, \underline{h}) \qquad (*)$$

$$R_2(\underline{x}_0, \underline{h}) = \frac{1}{2} (h \cdot \nabla)^2 f(\underbrace{\underline{x}_0 + \tau \cdot \underline{h}}_{\tilde{\underline{x}}}) \quad \text{für ein } \tau \in (0, 1)$$

$$(\underline{h} \cdot \nabla)^2 f(\tilde{x}) = h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\tilde{\underline{x}}) + 2 h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\tilde{\underline{x}}) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\tilde{\underline{x}})$$

$$= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} f_{xx}(\tilde{\underline{x}}) & f_{xy}(\tilde{\underline{x}}) \\ f_{xy}(\tilde{\underline{x}}) & f_{yy}(\tilde{\underline{x}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \underline{h} \cdot H(\tilde{\underline{x}}) \underline{h}$$

Hesse Matrix $\qquad$ SYMMETRISCH!

setze $\underline{h} = \underline{x} - \underline{x}_0$; erhalte aus $(*)$

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot H(\tilde{\underline{x}})(\underline{x} - \underline{x}_0)$$

$$\approx \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot H(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)$$

$\begin{cases} \underline{x}_0 \text{ Maximalstelle, falls } < 0 \ \ \underline{x} \text{ nahe } \underline{x}_0 \\ \underline{x}_0 \text{ Minimalstelle, falls } > 0 \ \ \underline{x} \text{ nahe } \underline{x}_0 \end{cases}$

$H(\underline{x}_0)$ SYMMETRISCH

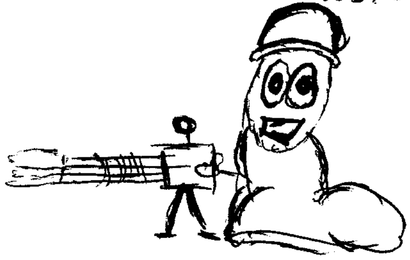
$\Rightarrow$ $\exists$ 2 reelle Eigenwerte λ_1, λ_2

$\begin{cases} 1) \ \lambda_1, \lambda_2 < 0 & \text{Maximalstelle} \\ 2) \ \lambda_1, \lambda_2 > 0 & \text{Minimalstelle} \\ 3) \ \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 & \text{Sattelstelle} \end{cases}$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(H(\underline{x}_0)) = f_{xx}(\underline{x}_0) f_{yy}(\underline{x}_0) - f_{xy}^2(\underline{x}_0) \qquad \boxed{=} D(\underline{x}_0) \ \text{Skript}$$

positiv $\Rightarrow$ Min. oder Max.

negativ $\Rightarrow$ ~~Max~~ Sattel



$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Spur } H(\underline{x}_0) = f_{xx}(\underline{x}_0) + f_{yy}(\underline{x}_0)$

positiv $\Rightarrow$ Min

negativ $\Rightarrow$ Max

oder besser: $f_{xx}(\underline{x}_0)$ oder $f_{yy}(\underline{x}_0) > 0 \Rightarrow$ Min

$\qquad\qquad$ ——— " ——— $< 0 \Rightarrow$ Max

BEISPIEL:

$$f(x,y) = (1-x^2)\left(1+\tfrac{1}{4}(y-1)^2\right)$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x\left(1+\frac{1}{4}(y-1)^2\right) \\ (1-x^2)\,\frac{1}{2}(y-1) \end{pmatrix}$$

Sei $(x_0, y_0) = (0, 1)$; dann gilt $\nabla f(0,1) = \underline{0}$

berechne $H(\underline{x}_0, y_0)$

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 & -2x \cdot \frac{1}{2}(y-1) \\ -2x\,\frac{1}{2}(y-1) & \frac{1}{2}(1-x^2) \end{pmatrix}$$

$$H(0,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{SATTEL}$$

EXTREMALPROBLEME MIT NEBENBEDINGUNGEN

$G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet;

$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$

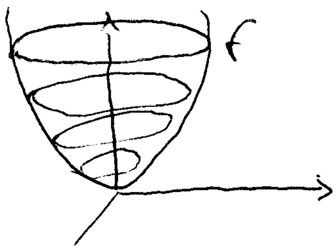
$g : G \longrightarrow \mathbb{R}$

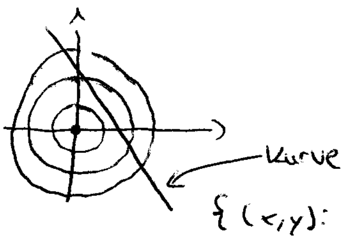
Problem: Charakterisiere

$f(\underline{x}_0) \le f(\underline{x}) \;\; \forall\; \underline{x} \in G : g(\underline{x}) = 0$

Geometrisches Problem:

Bsp: $\quad f(x,y) = x^2 + y^2; \quad g(x,y) = y + 2x - 2$





$g(x,y) = 0$

$\Longleftrightarrow y = -2x + 2$

$y(t) = \begin{pmatrix} t \\ -2t+2 \end{pmatrix}$

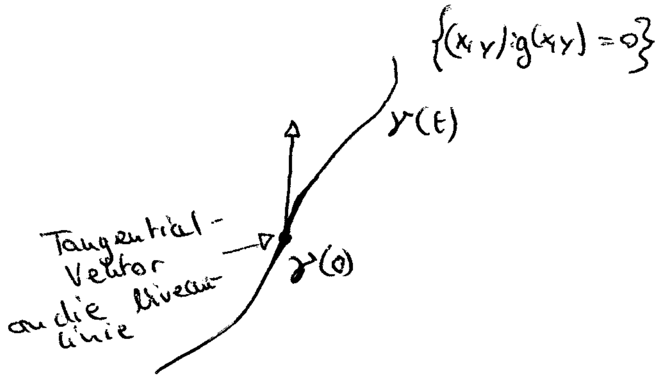
$F(t) = f(\gamma(t)) = t^2 + (-2t+2)^2$ kann minimiert werden!

Gibt es eine Methode, die <u>ohne</u> explizite Kenntnis von γ auskommt?

<u>betr.:</u> $F(t) := f(\gamma(t))$

Solche "Kurven" γ existieren lokal falls $\nabla g(\underline{x}_0) \neq 0$

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(t) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \nabla f(x_0) \cdot \gamma'(0)$$



$\Longrightarrow$ $\nabla f(\underline{x}_0)$ ist normal zur Niveaulinie von $\{g = 0\}$

<u>aber:</u> $\nabla g(\underline{x}_0)$ ist " zur " $\{g = 0\}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\nabla f(\underline{x}_0) = \lambda \nabla g(\underline{x}_0)}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$

Lagrange Multiplikator

Was heißt das in unserem Beispiel?

$f(x,y) = x^2 + y^2$; $g(x,y) = y + 2x - 2$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x &= 2\lambda \\ 2y &= \lambda \\ y + 2x - 2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad x = \tfrac{4}{5} \quad y = \tfrac{2}{5} \quad \lambda = \tfrac{4}{5}$$

<u>„INTERESANTES" BEISPIEL:</u>

$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch

$f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot (A \cdot \underline{x})$

$\nabla f(\underline{x}) = 2 A\underline{x}$

$\left(\text{vgl. } \begin{aligned} f(x) &= ax^2 \\ f'(x) &= 2ax \end{aligned}\right)$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$f(x,y) = x^2 a_{11} + 2xy a_{12} + y^2 a_{22}$

$\nabla f(x,y) = 2 \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{22}y + a_{12}x \end{pmatrix} = 2A\underline{x}$

$g(\underline{x}) = \|\underline{x}\|^2$ $(\underline{x} \cdot (\mathbb{1} \cdot \underline{x}))$

$\nabla g(\underline{x}) = 2\underline{x}$

$f(\underline{x}) \to$ min. unter der NB: $g(\underline{x}) = 1$

Lagrange Multiplikator Regel: $\nabla f(\underline{x}_0) = \lambda \nabla g(\underline{x}_0)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\leadsto \quad 2A\underline{x} = \lambda 2\underline{x}$

$\Leftrightarrow \quad A\underline{x} = \lambda\underline{x}$